Учебное пособие для педагогических институтов

В. В. Мултановский
А. С. Василевский

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. В. Мултановский
А. С. Василевский

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Классическая электродинамика

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990

ББК 22.313
М90

Рецензенты. кафедра теоретической физики Липецкого педагогического ииститута; профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Владимирского педагогического ииститута Д. И. Пеккер

Мултановский В. В., Василевский А. С.

М90 Курс теоретической физики: Классическая электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов.— М.: Просвещение, 1990.— 272 с.: ил.— ISBN 5-09-000927-9

В книге в соответствии с программой курса теоретической физики разобраны понятия и законы макроскопической электродинамики. В основу положены уравнения Максвелла для непрерывной системы зарядов в вакууме. Курс дает возможность студентам работать самостоятельно по лекциям и практическим заданиям.

М $\frac{430900000-335}{103(03)-90}$ 21—89 **ББК 22.313**

ISBN 5-09-000927-9

© Мултановский В. В., Василевский А. С., 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 4

Учение об электромагнитном поле в вакууме

Глава I. **Основные понятия и принципы электродинамики** 8
§ 1. Электрический заряд и электромагнитное поле 8
1.1. Заряд. Плотность заряда и плотность тока (8). 1.2. Закон сохранения заряда (12). 1.3. Электромагнитное поле. Напряженность электрического поля. Индукция магнитного поля (14).

§ 2. Система уравнений Максвелла – основа электродинамики 18
2.1. Уравнение Максвелла для системы зарядов в вакууме (18). 2.2. Интегральная форма уравнений Максвелла. Графическое изображение полей (21). 2.3. Связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнитных явлений (25). 2.4. Принцип суперпозиции полей (27). 2.5. Задачи электродинамики (29). 2.6. Уравнения Максвелла – Лоренца. Принцип причинности в электродинамике (32).

§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля 34
3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов (34). 3.2. Энергия электромагнитного поля. Плотность и поток энергии. Закон изменения энергии (36). 3.3. Закон сохранения энергии для изолированной системы поле-заряды (39). 3.4. Импульс электромагнитного поля. Закон сохранения импульса (40).

§ 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля 43
4.1. Потенциалы электромагнитного поля (43). 4.2. Уравнения электромагнитного

поля в потенциалах (45). 4.3. Понятие об общем решении уравнений поля в потенциалах (47).
§ 5. Решения уравнений поля 49
5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны (49). 5.2. Гармонические составляющие свободного поля (51). 5.3. Сферические волны (53). 5.4. Потенциалы поля стационарной системы движущихся зарядов (56). 5.5. Запаздывающие потенциалы (58). 5.6. Характерные особенности и итоги общей задачи о расчете полей (61).
Глава II. **Стационарное электромагнитное поле** 68
§ 6. Стационарное электрическое поле в вакууме 68
6.1. Особенности стационарных полей (68). 6.2. Уравнения стационарного электрического поля в потенциалах (69). 6.3. Электростатическое поле и закон Кулона (74). 6.4. Электростатическое поле системы зарядов на большом удалении. Дипольный момент системы (75).
§ 7. Работа и энергия электростатического поля. Сила действующая на жесткую систему зарядов.... 79
7.1. Система зарядов во внешнем электростатическом поле. Работа и потенциальная энергия (79). 7.2. Силы, действующие на жесткую систему зарядов во внешнем поле (80). 7.3. Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля (82).
§ 8. Магнитостатическое поле в вакууме 87
8.1. Уравнения магнитостатического поля в потенциалах (87). 8.2. Векторный потенциал и индукция магнитостатического поля (88). 8.3. Магнитное поле в дипольном приближении (89). 8.4. Энергия системы движущихся зарядов во внешнем магнитном поле. Сила, действующая на систему (91). 8.5. Энергия магнитостатического поля (92).
Глава III. **Электромагнитные волны и излучение электромагнитных волн** 99
§ 9. Плоские электромагнитные волны 99
9.1. Уравнение Максвелла и образование электромагнитных волн (99). 9.2. Векторы напряженности и индукции плоской

электромагнитной волны (101). 9.3. Гармонические составляющие свободного поля (104). 9.4. Поляризация электромагнитных волн (107).
§ 10. Излучение электромагнитных волн 108
10.1. Потенциалы электромагнитного поля вдали от системы зарядов (108). 10.2. Электрическое дипольное излучение (112). 10.3. Магнитное дипольное излучение (117). 10.4*. Понятие о волновой и квазистатической зонах (118). 10.5*. Спектральное разложение излучения (119).
§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом 121
11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле (121). 11.2. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом (124).
Глава IV. **Релятивистская формулировка электродинамики** 131
§ 12. Релятивистская ковариантность уравнений электродинамики 131
12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда (131). 12.2. Ковариантность уравнений электромагнитного поля в потенциалах (135).
§ 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой 136
13.1. Тензор электромагнитного поля (136). 13.2. Преобразование векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инварианты поля (137). 13.3. Эффект Доплера для электромагнитных волн (142).

Электромагнитное поле и процессы в веществе

Глава V. **Основные понятия и уравнения электромагнитного поля в веществе** 148
§ 14. Усреднение уравнений микроскопического поля в веществе 148
14.1. Свободные и связанные заряды (148). 14.2. Усредненные уравнения поля для системы свободных и связанных зарядов (150). 14.3. Уравнения Максвелла–Лоренца для микроскопического поля в электронной теории (152). 14.4. Макроско-

пическое усреднение уравнений Максвелла – Лоренца (153).
§ 15. Уравнения Максвелла для поля в веществе 154
15.1. Поляризация вещества в электрическом поле (154). 15.2. Намагничивание вещества (158). 15.3. Уравнения Максвелла для поля в веществе. Напряженность магнитного и индукция электрического полей (162). 15.4. Магнитная и электрическая проницаемости вещества. Материальные уравнения (163).
§ 16. Характерные особенности полей в веществе 164
16.1. Уравнения поля в потенциалах (164). 16.2. Граничные условия (167). 16.3. Энергия и импульс поля в веществе (172).
Глава VI. **Элементы электростатики** 177
§ 17. Электростатика диэлектриков 177
17.1. Электростатическое поле в однородном диэлектрике (177). 17.2. Электростатическое поле при наличии границ раздела в среде и разрывов непрерывности плотности зарядов (180).
§ 18. Проводники в электростатическом поле 185
18.1. Уединенный проводник. Электроемкость (185). 18.2*. Система проводников (188). 18.3. Энергия электростатического поля как энергия взаимодействия системы тел (190). 18.4. Силы, действующие на тела в электростатическом поле (192).
Глава VII. **Постоянный электрический ток. Магнитное поле тока** 198
§ 19. Уравнения Максвелла и законы постоянного тока .. 198
19.1. Структура электрического поля постоянного тока (198). 19.2. Стороннее поле и закон Ома в дифференциальной форме (200). 19.3. Поле замкнутой цепи с постоянным током (201). 19.4. Интегральный закон Ома для замкнутой цепи. Закон Джоуля – Ленца (202).
§ 20. Магнитное поле постоянных линейных токов 208
20.1. Закон Био-Савара (208). 20.2. Понятие о магнитостатике магнетиков (212). 20.3. Энергия магнитного поля постоянных токов. Коэффициенты индукции (213). 20.4. Механические силы, действующие в магнитном поле. Формула Ампера (215).

Глава VIII. **Квазистационарное электромагнитное поле и квазистационарные процессы** 219
§ 21. Уравнения квазистационарного поля. Электромагнитная индукция 219
21.1. Условия квазистационарности (219). 21.2. Уравнения квазистационарного поля (221). 21.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея (222).
§ 22. Расчет тока в нелинейном проводнике (скин-эффект) 228
Глава IX. **Электромагнитные волны в веществе** 233
§ 23. Электромагнитные волны в веществе 233
23.1. Плоские волны в идеальном диэлектрике (233). 23.2*. Электромагнитные волны в однородной проводящей среде (236). 23.3. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе двух диэлектриков (239).
§ 24. Электромагнитная природа света 242
24.1. Свет — электромагнитные волны (242). 24.2. Световое поле (243). 24.3*. Принцип Гюйгенса — Френеля (245). 24.4. Геометрическая оптика как предельный случай волновой (248). 24.5. Дисперсия диэлектрической проницаемости (250). 24.6. Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля. Понятие о нелинейной оптике (253). 24.7. Границы применимости классической электродинамики в оптике (254).
Приложения 257
Литература для дополнительного чтения 266

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая электродинамика является второй книгой курса теоретической физики для студентов физико-математических специальностей пединститутов. При изучении электродинамики иногда необходимо возвращаться к отдельным вопросам, изложенным в первой книге курса «Классическая механика» (М., Просвещение, 1989).

В пособии выделен основной материал: фундаментальные понятия, принципы и положения электродинамики, изучение которых должно осуществляться на лекциях. Для облегчения организации самостоятельной работы студентов курс снабжен методическими указаниями и рекомендациями к главам. Этой же цели служат примеры и упражнения, раскрывающие основные положения теории, иллюстрирующие ее законы, обеспечивающие в отдельных случаях связь со школьным курсом (но не заменяющие задачники по теоретической физике).

По мере изучения курса все большее значение приобретают выкладки, приводящие к конкретным физическим выводам: решения уравнений, преобразования формул и т. д. Предполагается, что студенты будут проделывать намеченные в каждом вопросе расчеты, для чего можно использовать дополнения и приложения, помещенные в конце книги, а также пособия и справочники по математике.

ВВЕДЕНИЕ

Электродинамику можно определить как науку об электромагнитном поле и его связи с электрическими зарядами, а также о действии поля на заряды.

В классической механике рассматривается движение тел под действием заданных сил, причем зависимость сил от координат, времени и скорости материальной точки указывается как найденная экспериментально либо заимствуется из других физических теорий. Например, нами изучались проявления гравитационных и электромагнитных взаимодействий в виде ускоренных движений тел в пространстве, а природа соответствующих сил оставалась в тени. Электродинамика в известной мере восполняет этот пробел, описывая электромагнитное взаимодействие со стороны сил, вызванных электрически заряженными телами и действующих на тела, несущие заряды.

Понятие электрического заряда является в электродинамике одним из исходных. Здесь обычно говорят о заряде как о самостоятельной субстанции, т. е. отделяют это свойство от его носителей — тел и частиц. Величина заряда определяется той силой, которая действует между двумя точечными зарядами, один из которых принимается за эталонный.

Но основной объект, изучаемый электродинамикой, не заряд, а электромагнитное поле — переносчик электромагнитного взаимодействия между зарядами. Важно, что электромагнитное поле — реальный физический объект, вид материи, существующий в природе наряду с веществом. Хотя поле создается электрическими зарядами, оно может существовать и независимо от зарядов — в так называемом свободном состоянии, утратив связь с зарядами. Так, например, свет от Солнца движется к Земле 8,3 мин после излучения его атомами солнечной фотосферы.

Все электромагнитные излучения, фиксируемые и используемые человеком, возникают за счет движения электрических зарядов, но далее существуют в вакууме самостоятельно. Электромагнитное поле занимает макроскопические области пространства, не имеющие в отличие от тел четких границ, и судят о наличии поля по силе, действующей в этих областях на заряженные тела.

В механике уже было использовано понятие силового поля.

Однако там поле – объект вспомогательный математический. Это не физический материальный объект. Согласно механической концепции на тело действует сила со стороны другого тела на расстоянии без какого-либо материального посредника. Но в природе реально не существует взаимодействие между телами на расстоянии (это только модель, применяемая в механике со сравнительно медленным движением тел), а имеет место взаимодействие зарядов с полем в точках, где заряды находятся. В электродинамике, изучающей самого переносчика взаимодействия – электромагнитное поле, механическая концепция дальнодействия заменяется концепцией близкодействия. Теперь переносчиком или носителем силы является электромагнитное поле. Сила определяется состоянием поля в заданной точке, а передача взаимодействия между заряженными телами осуществляется через поле с конечной скоростью c. Такова в общих чертах полевая концепция взаимодействия электродинамики.

Полевая или релятивистская модель взаимодействия рассматривалась нами во второй части курса (см. [1]). По скорости передачи взаимодействия электромагнитное поле является предельно релятивистским объектом, а изучающая его электродинамика по природе изучаемого объекта – релятивистской теорией (но это не исключает возможность движения заряженных тел со скоростями $v \ll c$), где для описания полей, как и в механике для описания движения тел, применяются инерциальные системы отсчета. С достаточной степенью точности для многих электромагнитных явлений инерциальной системой может служить система, связанная с Землей. (Во многих задачах электромагнитные силы на несколько порядков превышают силы инерции, так что в этой системе последними можно пренебречь.) При переходе от одной инерциальной системы к другой в электродинамике необходимо использовать преобразования Лоренца.

В классической электродинамике как поле, так и заряд считаются непрерывными. Это модели макроскопических полей и зарядов. В то же время известна дискретная микроструктура поля и заряда: свободное электромагнитное поле состоит из элементарных частиц – фотонов, а заряд – из элементарных зарядов частиц, входящих в состав вещества,– электронов и протонов.

Классическая электродинамика относится к макроскопическим теориям и имеет хотя и очень широкую, но ограниченную область применимости. Она справедлива при условии, когда дискретный характер поля и заряда не сказывается при протекании явлений. Как правило, в ней речь идет о макроскопических областях пространства, о скоплениях огромного множества электронов, протонов и соответственно фотонов; рассматривается некое усредненное взаимодействие макроскопических зарядов и полей. Что касается электромагнитного взаимодействия на элементарном уровне, то законы макроскопической электродинамики имеют к нему ограниченную применимость и существенно дополняются в так называемой квантовой электродинамике.

Теоретическое ядро электродинамики – система дифференциальных уравнений Максвелла, устанавливающая связь между характеристиками электромагнитного поля: напряженностью электрического поля и индукцией магнитного, а также расположением и движением электрических зарядов (плотностями тока и заряда). Бóльшая часть задач электродинамики сводится к нахождению поля по заданному расположению и движению зарядов путем интегрирования исходных уравнений для различных частных случаев.

Область применимости электродинамики необычайно широка в силу распространенности электромагнитных взаимодействий в природе, важности их технических применений, существенной роли этой теории в понимании свойств и структуры вещества и т. д.

Созданию современной теории электричества предшествовал длительный период накопления эмпирических фактов и открытий отдельных фундаментальных законов. Начало научного изучения электричества и магнетизма было положено У. Гильбертом во второй половине XVI века, который объяснил поведение магнитной стрелки взаимодействием полюсов магнитов, открыл намагничивание, электризацию ряда тел и, наконец, ввел термин «электричество». Г. Кавендиш в 1771 г. впервые экспериментально показал, что силы взаимодействия электрических зарядов обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними, а в 1784–1785 гг. Ш. Кулон установил фундаментальный закон взаимодействия точечных неподвижных электрических зарядов. В 1791 г. Л. Гальвани открыл электрический ток, А. Вольта (1800 г.) построил первый источник тока – «вольтов столб», и в 1820 г. Х. Эрстед открыл магнитное действие тока.

Начало электродинамики как самостоятельной науки связывают с работами А. Ампера. Он около 1820 г. ввел понятия «напряжение» и «ток», установил закономерности механических взаимодействий токов, сделал попытку объяснить природу магнитных полей постоянных магнитов микроскопическими «молекулярными» токами в веществе.

Вскоре (1827 г.) Г. Ом открывает закон, названный его именем, а в 1831 г. следует открытие М. Фарадеем явления электромагнитной индукции, установившее важную связь между магнитным полем и электрическим.

Характерная особенность первоначальных эмпирических знаний об электричестве и магнетизме состояла в их разобщенности: например, рассматривалось до пяти видов электричества, а электрические и магнитные явления трактовались как самостоятельные. Процесс теоретического обобщения в этой области знания особенно наглядно выявляет установление единой природы и единых начал явлений и объектов, кажущихся различными. Вершиной такого обобщения является теория электромагнитного поля, развитая Д. К. Максвеллом в 1860–1865 гг. Как электрическое поле, так и магнитное оказываются в ее рамках проявлениями единой сущности – электромагнитного поля, а все эмпирические законы электромагнетизма

могут быть выведены из исходных уравнений. Теория Максвелла утвердилась в физике после открытия в 1888 г. Г. Герцем электромагнитных волн, предсказанных Максвеллом.

В истории познания природы замена механической концепции взаимодействия полевой имела революционное значение. Поле как таковое можно считать введенным в физику М. Фарадеем. Окончательно взгляды на поле как на вид материи утвердились после работ А. Эйнштейна по специальной теории относительности (1905 г.).

В теории Максвелла электромагнитные свойства вещества учитывались феноменологически. В 1895 г. Г. Лоренц в электронной теории синтезирует идеи теории поля с представлениями о дискретности электрических зарядов. И хотя электронная теория Лоренца оказалась ограниченной в силу отсутствия в ней неизвестных тогда квантовых положений, в принципиальном отношении анализ электрических и магнитных свойств вещества, а также особенностей электромагнитного поля в нем на основе изучения взаимодействия зарядов вещества с полем является крупным эвристическим шагом вперед. Современная электронная теория – фундаментальная отрасль физики, опирающаяся не только на электродинамику и классическую механику, но и на квантовую механику и статистическую физику.

В настоящее время по причинам методического характера не представляется возможным построить курс электродинамики в соответствии с исторической последовательностью ее развития. Целесообразно начинать с изучения электромагнитного поля в вакууме как нового (по отношению к веществу) вида материи, а затем на этой основе переходить к изучению поля в веществе. Если рассматривать вещество как систему связанных между собой электрических зарядов, то некоторые особенности электромагнитного поля в веществе становятся понятными в рамках простейшей модели вещества.

По этим причинам в нашем курсе изложение электродинамики подчинено следующей схеме:

– за основу взято учение об электромагнитном поле макроскопической системы электрических зарядов в вакууме (т. е. без учета влияния на поле тел, на которых заряды располагаются);

– электромагнитное поле в веществе рассматривается как результат наложения на внешнее поле электромагнитного поля перестраивающихся в нем зарядов вещества.

В связи с избранным подходом в курсе выделены две части: учение о поле в вакууме и учение о поле в веществе. Постановка во главу угла изучения электромагнитного поля в вакууме характерна и для современного школьного курса физики.

С историей развития теории электричества можно ознакомиться по специальным пособиям (см. [4]).

УЧЕНИЕ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Глава I
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этой главе курса рассмотрены общие вопросы электродинамики как учения об электромагнитном поле. Ее положения и выводы необходимы для изучения каждой из остальных глав.

§ 1. Электрический заряд и электромагнитное поле

1.1. Заряд. Плотность заряда и плотность тока. Исходными для всей электродинамики являются такие понятия, как «электрический заряд» и «электромагнитное поле». Понятие «электрический заряд» тесно связано с особыми свойствами заряженных тел и частиц, которые проявляются в образовании электромагнитного поля, сопутствующего заряду, и в силовом действии поля на заряд. Эти два, вообще говоря, разных свойства заряженных тел — создавать поле и испытывать на себе действие поля других зарядов — характеризуются одной и той же величиной — электрическим зарядом Q.

Величина заряда определяется в физических измерениях по тем или иным проявлениям электромагнитного взаимодействия. Так, для точечных покоящихся зарядов предполагают, что сила взаимодействия между ними пропорциональна величине зарядов (закон Кулона). Поэтому, выбирая единичный заряд, можно определить величину другого заряда, сравнивая силы взаимодействия зарядов: единичного с единичным и единичного с неизвестным. В метрологии в настоящее время принят другой (не прямой) способ определения величины заряда, основанный на магнитном взаимодействии движущихся зарядов, образующих токи. По определению сила постоянного тока равна отношению заряда ко времени:

$$I = \frac{Q}{t},$$

где Q — заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника. На основании предположения о пропорциональности механической силы взаимодействия двух линейных проводников силам тока в них установлена основная единица силы тока — ампер. (Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от дру-

гого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины.)

Поэтому единица заряда — кулон — является производной единицей (см. [7, 8, 9])

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Заряд — величина скалярная и выражается действительными числами: может иметь положительные, нулевые и отрицательные значения. Существенно, что заряд также и *скаляр* (инвариант) преобразований Лоренца, т. е. заряд некоторого тела или частицы выражается одним и тем же числом во всех инерциальных системах отсчета. Наконец, заряд — величина *аддитивная:* при соединении, например, двух точечных зарядов в один «результирующий» заряд будет равен алгебраической сумме соединенных зарядов. *Заряд любой системы заряженных тел и частиц равен сумме зарядов отдельных тел и частиц. Заряд макроскопического тела равен сумме зарядов его частей.*

Не следует думать, что перечисленные свойства заряда самоочевидны или априорны; все они результат обобщения опыта, отражение объективно существующих природных свойств тел и частиц. Опыт отвечает и на вопрос о непрерывности или дискретности заряда. Как известно, пределом дробимости электрического заряда является элементарный заряд, присущий электронам, протонам и другим заряженным элементарным частицам, модуль его $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Субэлементарные частицы — кварки — имеют заряды $\pm \frac{1}{3} e$ или $\pm \frac{2}{3} e$, но они в свободном состоянии не наблюдаются.)

Таким образом, электрический заряд по природе дискретен. Однако в классической электродинамике рассматривают макроскопические заряды, которые считаются непрерывными, а непрерывными заряды можно считать лишь без учета существования наименьшего элементарного заряда. Отсюда следует, что понятие бесконечно малого заряда dQ имеет физический, а не буквально математический смысл: dQ мало по сравнению с некоторым полным зарядом Q, но все еще так велико по сравнению с элементарным зарядом, что дискретность элементарных зарядов можно не принимать во внимание.

Непрерывность электрического заряда допускает и непрерывное его распределение в пространстве; оно описывается плотностью заряда, определяемой соотношением

$$\varrho = \frac{dQ}{dV}, \tag{1.1}$$

где dQ — заряд в элементе объема пространства dV. Рассматривая плотность зарядов, расположенных на телах, следует также учитывать, что элементарный заряд dQ сосредоточен в физически малом объеме пространства dV, размеры которого малы по сравнению

с другими размерами в задаче. Однако этот объем все еще очень велик по сравнению с объемом отдельного атома. (Такое физическое, а не только математическое толкование dQ и dV следует иметь в виду на протяжении всего курса классической электродинамики.)

В целом ряде задач электродинамики можно отвлечься от материальных тел и частиц — носителей зарядов — и иметь дело только с зарядами, распределенными в пространстве тем или иным образом. Заряды рассматриваются условно как особая субстанция, распределенная в пространстве с плотностью ϱ.

Обсудим еще понятие «точечный заряд». Ему в классической электродинамике может быть придан двоякий смысл. Во-первых, за точечный заряд принимается бесконечно малый заряд dQ, находящийся в бесконечно малом элементе объема пространства. Эта модель точечного заряда соответствует его непрерывному распределению в пространстве. В таком случае

$$dQ = \varrho dV. \tag{1.1-а}$$

Во-вторых, в отдельных случаях используется модель дискретного в пространстве точечного заряда. Согласно этой модели любой величины макроскопический заряд q может быть сосредоточен в геометрической точке пространства. Плотность заряда в таком случае выражается формулой

$$\varrho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{1.1-б}$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ — дельта-функция Дирака (см. П. III), а $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки, где расположен заряд. (Здесь и далее буква q используется для обозначения величины точечного заряда.)

Элементарный электрический заряд электрона e также является точечным. Но что касается дискретных зарядов элементарных частиц, то в рамках классической электродинамики нет возможности ставить вопрос об особенностях, вносимых в электромагнитное взаимодействие дискретностью зарядов как по величине, так и по пространственному распределению, ибо здесь отдельные элементарные заряды и их поля не рассматриваются. Взаимодействия элементарных зарядов между собой и особенности их полей описываются квантовой электродинамикой.

Чтобы подсчитать заряд в конечном объеме пространства, нужно знать его плотность $\varrho(\vec{r})$ в каждой точке и произвести суммирование:

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r})\, dV. \tag{1.2}$$

Как известно, движущиеся электрические заряды создают ток. Для описания этого явления используется понятие плотности тока $\vec{j}$, которую определим соотношением

$$\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r}), \tag{1.3}$$

где ϱ — плотность заряда в некоторой точке пространства, а $\vec{v}$ — ско-

рость движения заряда ϱdV в ней. (Если учитывать, что dV не является точкой, то речь идет о некоторой средней скорости частей заряда dQ в элементе объема dV с центром в точке $\vec{r}$.) Модуль плотности тока численно равен заряду, проходящему в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной траекториям движения зарядов – линиям тока; направлен вектор $\vec{j}$ по касательной к линии тока.

От плотности тока нетрудно перейти к силе тока – заряду, протекающему через площадку S за единицу времени (рис. 1.1):

$$I = \int_S \vec{j}\, \overrightarrow{dS} = \int_S j_S dS, \tag{1.4}$$

где j_S – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к площадке dS. Сила тока – скалярная величина; это поток вектора плотности тока через некоторую поверхность.

Если электрические заряды движутся, то плотность зарядов в пространстве может изменяться с течением времени, т. е. плотность заряда есть функция координат точки пространства и момента времени:

$$\varrho = \varrho(\vec{r},\ t).$$

В общем случае функцией координат и времени является и плотность тока:

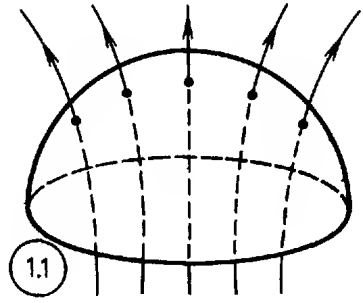
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},\ t).$$

Для точечного заряда

$$\varrho = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \tag{1.4-а}$$

$$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \tag{1.4-б}$$

Итак, распределение и движение электрических зарядов в пространстве описывается скалярной и векторной величинами: плотностью заряда ϱ и плотностью тока $\vec{j}$. В классической электродинамике эти две величины определяют действие некоторого заданного поля на движущиеся заряды и электромагнитное поле, созданное этими зарядами.



1.2. Закон сохранения заряда. Насколько это сейчас известно, в число точных (абсолютных) законов природы наряду с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса входит и закон сохранения электрического заряда: *при любых известных взаимодействиях элементарных частиц между собой сумма (алгебраическая) электрических зарядов частиц до взаимодействия равна сумме электрических зарядов частиц после взаимодействия.* В процессе взаимодействия необязательно сохраняются частицы как таковые; не сохраняется их общее число, так как одни частицы исчезают, а другие возникают, но суммарный их заряд остается неизменным. Закон проверен на множестве реакций с элементарными частицами с высокой степенью точности.

Классическая электродинамика изучает процессы, при которых не происходит взаимных превращений заряженных частиц, так что закон сохранения заряда здесь есть простое следствие сохранения его носителей — электронов и протонов. *В изолированной системе электрический заряд сохраняется.* Изменение его в неизолированной системе определяется только токами зарядов, текущими из системы или в систему. Поэтому убыль величины заряда в любом объеме пространства в единицу времени равна току, вытекающему через поверхность, ограничивающую объем. Математическая формула закона сохранения имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho dV = \oint_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}. \tag{1.5}$$

Это интегральное равенство эквивалентно дифференциальному равенству

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{j}. \tag{1.6}$$

Для доказательства следует взять интеграл по объему от обеих частей равенства (1.6) и в правой части применить теорему Гаусса. Соотношение (1.6) называется *уравнением непрерывности* тока зарядов, оно выражает закон сохранения заряда в каждой точке пространства.

Закон сохранения заряда в форме (1.5) имеет следующий смысл: плотность зарядов изменяется только за счет их прихода и ухода из объема V. Заряды не «производятся» в каких-либо точках пространства и соответственно не «уничтожаются». Если бы были «источники» зарядов, то плотность изменялась бы и по этой причине. Пришлось бы записать

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = i - \operatorname{div}\vec{j},$$

где i — скорость рождения зарядов в точке пространства, т. е. заряд, производимый в единицу времени в единице объема.

Требует разъяснения еще одно обстоятельство, связанное с определением плотности тока выражением (1.3). В формуле

$$\vec{j}(\vec{r},\ t) = \varrho(\vec{r},\ t)\,\vec{v}(\vec{r},\ t)$$

речь идет о выделенном точечном движущемся заряде $dQ = \varrho dV$, проходящем за время dt через площадку $\overrightarrow{dS}$, коллинеарную $\vec{j}$. Величина этого заряда определяется плот-

ностью $\varrho(\vec{r}, t)$ в заданной (неподвижной) точке. Это обстоятельство отражено в уравнении непрерывности (1.6) знаком частной производной $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$: рассматривается скорость изменения плотности заряда в неподвижной точке пространства.

При стационарном распределении зарядов $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, т. е. имеет место движение зарядов лишь с замкнутыми линиями плотности тока. В случае точечных зарядов траектории движения являются замкнутыми кривыми.

Пример 1.1. **Непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Оно может быть задано некоторой непрерывной функцией координат. Например,

$$\varrho = \varrho_0,$$

где ϱ_0 есть постоянная величина. Это означает, что заряд по всему бесконечному пространству распределяется с одинаковой плотностью. Такой случай на практике не реализуется и далее в теории не рассматривается. Практически имеют смысл лишь заряды конечной величины, так что выражение

$$Q = \int_{\infty} \varrho dV$$

сходится, а не равно бесконечности. Поэтому плотность заряда, вообще говоря, убывающая функция расстояния от некоторой точки пространства, принятой за начало координат. Например,

$$\varrho = \varrho_0 e^{-r/R},$$

где r – расстояние от начала координат, совпадающего с точкой наибольшей плотности заряда, а R – радиус сферы, на которой плотность заряда уменьшается в e раз.

Пример 1.2. **Кусочно-непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Такое распределение типично для практики. Заряд с плотностью $\varrho = \varrho_1(\vec{r})$ распределен в некоторой области пространства. В соседней с нею области плотность заряда описывается другой функцией $\varrho = \varrho_2(\vec{r})$. На границе областей (поверхности S) ϱ может измениться скачком на конечную величину.

Так, например, плотность заряда может быть задана условиями:

$$\varrho = \varrho_0, \ r \leqq a;$$
$$\varrho = 0, \ r > a.$$

В этом случае мы имеем дело с равномерно заряженным по объему шаром радиусом a, за пределами которого зарядов в пространстве нет.

Пример 1.3. **Заряженные поверхности и нити.**

На практике встречаются случаи таких заряженных областей, которые следует моделировать без учета их объема, т. е. геометрическими поверхностями. Например, заряды на проводящем теле конечных размеров располагаются в поверхностном слое очень малой толщины. В этом и аналогичных случаях вводится поверхностная плотность зарядов:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}.$$

Для случая $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ при $r = a$ мы имсем, таким образом, дело с равномерно заряженной сферой радиусом a. В других точках пространства зарядов нет.

Аналогично рассматриваются заряженные нити, для которых вводится линейная плотность зарядов:

$$\varrho_{\text{лин}} = \tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Например, распределение $\tau = \tau_0 = \text{const}$ при $y = 0$, $z = 0$ соответствует равномерно заряженной нити, расположенной в пространстве вдоль оси Ox.

Пример 1.4. **Вычисление силы тока, вытекающего из сферы.**

Плотность тока определяется соотношением $\vec{j} = \frac{\alpha}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки с началом в центре сферы; α – постоянная величина.

Используя формулу (1.4) и сферические координаты, имеем

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\alpha}{4\pi r^2} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \alpha.$$

Пример 1.5. **Определение изменения величины заряда в сфере.** (См. условие предыдущей задачи.)

На основе закона сохранения заряда $-\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}$ имеем $\frac{dQ}{dt} = -\alpha$, $Q = Q_0 - \alpha t$, где Q_0 – величина заряда в начальный момент времени. Смысл коэффициента α выяснился: это скорость изменения заряда, сосредоточенного внутри сферы.

1.3. Электромагнитное поле. Напряженность электрического поля. Индукция магнитного поля. Электромагнитное поле – основной объект, изучаемый в электродинамике. Электрический заряд есть свойство заряженных частиц и заряженных тел, а электромагнитное поле, как уже говорилось,– вид материи, в макромире отличный от вещества. Существенное отличие поля от тел состоит в отсутствии локализации его в четко ограниченных областях пространства: электромагнитное поле, сопутствующее заряженным телам, занимает области без резкой границы, характерной для макроскопических тел. Кроме того, поля обладают проницаемостью: в одной и той же области пространства могут существовать одновременно несколько полей, тогда как поместить несколько тел в одну и ту же область пространства без изменения их свойств не удается. В общем случае мы имеем дело с переменным электромагнитным полем, рассеивающимся в пространстве и стремящимся занять возможно большую пространственную зону. Так, например, система электрических зарядов, ускоренно движущихся в некоторой пространственной области, излучает поле в виде электромагнитных волн в пространство, окружающее указанную область. Часто для конкретных систем зарядов приходится рассматривать поле во всем безграничном пространстве. При этом необходимо знать характер ослабления поля по мере удаления его от источника. (Вспомним, например, поле покоящегося точечного электрического заряда.)

Единство материи в виде вещества и поля проявляется в том, что имеются универсальные физические понятия, равно применимые ко всем физическим объектам: энергия, импульс, момент импульса. Эти величины присущи полю и в макроскопической модели поля считаются непрерывно распределенными с определенной плотностью по всему объему, занимаемому полем. Действия поля на тела, а также на органы чувств человека связаны с названными характеристиками поля; при взаимодействии поля с веществом меняется состояние поля и тел, изменяются энергии, импульсы, моменты.

Например, хорошо известно превращение энергии света во внутреннюю энергию тел, а также энергии электромагнитного поля, связанного с электрическим током, в механическую энергию (электродвигатель) и т. д.

Однако такие параметры, как энергия и импульс, не используются в качестве первоначальных или исходных для описания электромагнитных полей, ибо законы изменения и сохранения энергии, импульса и момента импульса не отражают специфики электромагнитных явлений. Первоначальным в этом плане считается силовое действие электромагнитного поля на внесенные в него электрические заряды. Удается различить две составляющие силы, действующие на заряд: электрическую $\vec{F}_э$, действующую как на покоящийся, так и на движущийся заряд независимо от скорости его движения, и магнитную $\vec{F}_м$, действующую только на движущийся заряд и существенно зависящую от его скорости. Соответственно вводятся две исходные характеристики: напряженность $\vec{E}$ электрического поля и индукция $\vec{B}$ магнитного поля, определяемые соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_э &= q\vec{E}, \\ \vec{F}_м &= q\,[\vec{v}\,\vec{B}]. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Эти формулы написаны на основании изучения результатов экспериментов по действию поля на различные заряды, движущиеся с разной скоростью. Опытным фактом является пропорциональность электрической силы и магнитной величине электрического заряда q. Пропорциональность имеет место в любом поле, в котором помещен заряд. Но в разных полях на покоящийся электрический заряд действует разная сила. Таким образом, сомножитель $\vec{E}$ в первой формуле в соответствии со скалярной природой заряда является вектором, характеризующим силовое действие поля на заряд в каждой точке поля. Что касается магнитной силы, то она зависит от скорости движения зарядов, причем из опыта вытекает пропорциональность силы модулю скорости и перпендикулярность к ней. Вектор $\vec{B}$ во второй формуле (1.7) характеризует магнитное поле в точке, где находится в данный момент движущийся заряд. В общем случае на точечный заряд в электромагнитном поле действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}]. \tag{1.8}$$

На основании формул (1.7) устанавливаются единицы напряженности и индукции:

$$1\,\frac{\text{В}}{\text{м}} = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}},\quad 1\text{Тл} = 1\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}\cdot\text{м/с}}. \tag{1.9}$$

При практическом измерении напряженности поля измеряют силу, действующую на покоящееся заряженное тело, помещенное в электрическом поле. Поскольку тело имеет конечные размеры, напряженность определяется лишь в предположении об

однородности поля в пределах участка пространства, занимаемого телом. Иными словами, поле в этом объеме при измерении усредняется. Соответственно при измерении магнитной индукции $\vec{B}$ поля используется некоторый проводник длиной l, на протяжении которого поле приходится считать однородным.

При измерениях напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ поля различают *заряд, создающий поле,* и *пробный заряд,* вносимый в поле для определения его характеристик (заряд q в формуле (1.8)). Пробный заряд должен быть достаточно мал, чтобы его собственное поле не влияло на систему зарядов, создающих поле, т. е. на результаты измерений.

Приведенные выше формулы (1.7) и (1.8) используются нами как *определения* векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ поля. Это, однако, не означает, что для нахождения указанных величин всегда необходимо прибегать к эксперименту. Величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могут быть рассчитаны по расположению и движению зарядов, создавших поле; именно такая задача чаще всего и является основной в электродинамике.

Поле определено или задано, если в каждой точке пространства в каждый момент времени известно значение двух величин:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},\ t) \ \text{ и } \ \vec{B} = \vec{B}(\vec{r},\ t),$$

иными словами, если известны две векторные функции (или шесть скалярных) четырех независимых переменных. Поля называются *стационарными,* если функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не содержат времени. Если же они не зависят от координат, то поля *однородны.* В общем случае поля неоднородны в пространстве и переменны во времени.

Задание поля системы зарядов в вакууме с помощью напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ оказывается достаточным: по этим двум векторам определяются не только силы, действующие на заряды, но и, как это будет показано ниже, энергия поля, его импульс, перемещение энергии (ее поток) в пространстве и т. д.

В заключение выясним одну терминологическую тонкость. Принято говорить, что заряды создают поле. Однако заряды никогда не существуют без поля: *заряды неразрывно связаны с полем,* так что указанное выражение имеет условный смысл. Но в отдельных случаях (неравномерное движение) заряды излучают электромагнитные волны, т. е. порождают поле, существующее далее *самостоятельно.* Это обстоятельство в известной мере и оправдывает выражение «заряды создают поле». Сам термин «поле» иногда используется и для обозначения области пространства, которую поле занимает.

Пример 1.6. **Выражение для плотности силы Лоренца.**

На элемент тела объемом dV с зарядом $dQ = \varrho dV$ действует электрическая составляющая силы Лоренца:

$$d\vec{F}_э = \vec{E}\varrho dV$$

Магнитная составляющая выразится формулой

$$d\vec{F}_м = \varrho dV\,[\vec{v}\,\vec{B}\,].$$

Применяя формулу

$$\vec{j} = \varrho\vec{v},$$

имеем для магнитной составляющей силы Лоренца, действующей на элемент проводника объемом dV:

$$d\vec{F}_{\text{м}} = [\vec{j}\,\vec{B}]\,dV.$$

Таким образом, плотность силы Лоренца оказывается величиной

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \varrho\vec{E} + [\vec{j}\,\vec{B}].$$

Пример 1.7. **Сила Ампера.**

Сила тока в линейном проводнике, т. е. в таком, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной, может считаться равной произведению постоянной плотности тока на сечение (рис. 1.2):

$$I = jS.$$

Вводя элемент проводника длиной dl, совпадающий по направлению для линейного проводника с вектором $\vec{j}$, имеем для элемента тока $\vec{j}dV$ выражение

$$\vec{j}dV = I\,\overrightarrow{dl}, \tag{1.10}$$

часто входящее в формулы электродинамики. Поэтому магнитная составляющая силы Лоренца, действующая на элемент длины линейного проводника, равна:

$$d\vec{F}_{\text{м}} = I\,[\overrightarrow{dl}\,\vec{B}]. \tag{1.11}$$

Эта сила называется силой Ампера.

Пример 1.8. **Потенциальное поле.**

Электромагнитное поле является полем векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Напомним, что векторные поля бывают двух видов: потенциальные и вихревые.

Поле некоторого вектора $\vec{E}\,(\vec{r})$ называют *потенциальным* или полем источников, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \\ &\operatorname{div}\vec{E} \neq 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

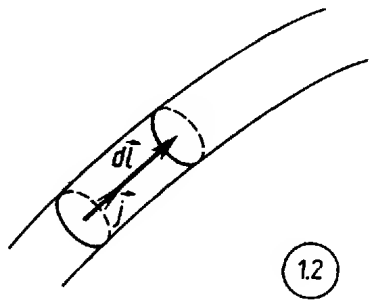
В общем случае потенциального поля

$$\operatorname{div}\vec{E} = \varrho\,(\vec{r}), \tag{1.13}$$

где $\varrho\,(\vec{r})$ – некоторая функция точки пространства. Условие потенциальности (1.12) можно записать по-другому, вводя скалярный потенциал поля $\varphi\,(\vec{r})$:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,(\vec{r}). \tag{1 14}$$

Если использовать формулу 25 из приложения II, помещенного в конце книги, то из соотношения (1.14) следует тождество $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. (Далее номера приложений и номера



1.2

используемых из них формул будут записаны в тексте сокращенно, например П. II, 25). Подстановка же (1.14) в (1.13) приводит к уравнению

$$\Delta \varphi = -\varrho. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) позволяет при некоторых дополнительных условиях по заданной функции $\varrho(\vec{r})$ определить $\varphi(\vec{r})$, а затем с помощью формулы (1.14) – поле $\vec{E}(\vec{r})$ (о том, как это делается, рассказано ниже).

Пример 1.9. **Вихревое поле.**

Поле некоторого вектора $\vec{B}(\vec{r})$ называется *вихревым* (или соленоидальным), если выполняются условия:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} \neq 0. \tag{1.16}$$

В общем случае вихревого поля

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}(\vec{r}), \tag{1.17}$$

где $\vec{j}(\vec{r})$ – некоторая векторная функция точки пространства. Условие соленоидальности (1.16) позволяет ввести векторный потенциал поля $\vec{A}(\vec{r})$ соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{1.18}$$

На основании формулы (П. II, 26) из выражения (1.18) следует тождество $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

При подстановке выражения (1.18) в равенство (1.17) с учетом условий (1.16) приходим к уравнению

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{j}(\vec{r}). \tag{1.19}$$

Если $\vec{j}(\vec{r})$ – известная функция, то с помощью уравнения (1.19) рассчитывается $\vec{A}(\vec{r})$, а затем по выражению (1.18) – и поле $\vec{B}(\vec{r})$.

Пример 1.10. **Поле с потенциальной и вихревой составляющими.**

К потенциальным и вихревым полям сводятся все векторные поля, изучаемые в нашем курсе. Пусть имеется некоторое поле $\vec{E}(\vec{r})$. Если $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$ – поле потенциальное. Если $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$, $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ – поле вихревое.

Рассмотрим также случай $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Из первого условия следует, что поле потенциально: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Второе приводит для него к уравнению

$$\Delta \varphi = 0.$$

Начиная с условия соленоидальности, аналогично получаем

$$\Delta \vec{A} = 0.$$

Но в нашем случае оба эти уравнения имеют только нулевые решения, так как ни одна из точек пространства в условиях не выделена. Так как во всех точках пространства $\varphi \equiv 0$, $\vec{A} \equiv 0$, то $\vec{E} \equiv 0$, $\vec{B} \equiv 0$, – поля нет.

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\operatorname{div} \vec{E} \neq 0, \ \operatorname{rot} \vec{E} \neq 0. \tag{1.20}$$

Представим вектор $\vec{E}$ в виде двух векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

так, что

$$\operatorname{rot} \vec{E}_1 = 0, \ \operatorname{div} \vec{E}_1 \neq 0; \ \operatorname{rot} \vec{E}_2 \neq 0, \ \operatorname{div} \vec{E}_2 = 0.$$

Условия (1.20) удовлетворяются. Отсюда видно, что поле вектора $\vec{E}$ имеет потенциальную составляющую $\vec{E}_1$ и вихревую $\vec{E}_2$.

Теперь все возможные случаи исчерпаны, любые поля сводятся таким способом к указанным двум видам.

§ 2. Система уравнений Максвелла – основа электродинамики

2.1. Уравнения Максвелла для системы зарядов в вакууме. В предыдущем параграфе описаны основные характеристики электриче-

ских зарядов и электромагнитного поля. Сейчас изучим количественные связи между напряженностью и индукцией поля, с одной стороны, и плотностями зарядов и токов в пустом пространстве (вакууме) – с другой. Эти связи выражаются довольно сложной системой дифференциальных уравнений в частных производных, носящих название системы уравнений Максвелла.

Впервые полная система уравнений была записана Д. К. Максвеллом в виде уравнений поля в веществе (см. § 15, п. 15.3). В математическом отношении уравнения поля для вакуума являются частными случаями уравнений поля для вещества ($\mu = \varepsilon = 1$). Однако в физическом плане уравнения в вакууме играют более фундаментальную роль. Как исходная система уравнений Максвелла для элементарных зарядов в пустоте впервые применена Х. А. Лоренцом в 1903 г. Современный вид уравнения Максвелла, используемые нами ниже, приобрели в работах Г. Герца и О. Хэвисайда в конце прошлого века.

По отношению ко всему учению об электромагнитном поле система уравнений Максвелла играет роль первоначальных исходных положений, или теоретических принципов. С исторической точки зрения она является абстрактным обобщением экспериментальных данных, и ее связь с эмпирическими законами электродинамики будет показана далее. Сейчас выпишем уравнения без обсуждения их происхождения и истории открытия, т. е. в готовом виде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{(2.1-а)} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0; & \text{(2.1-б)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, & \text{(2.1-в)} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}. & \text{(2.1-г)} \end{cases}$$

В уравнения входят следующие константы:

$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$ – магнитная постоянная;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ – электрическая постоянная.

Они появились здесь вследствие выбора единиц измерения величин $\vec{E}$ и $\vec{B}$, с одной стороны и ϱ и $\vec{j}$ – с другой, независимо от их связи, указываемой уравнениями.

Прямым расчетом можно убедиться, что

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \qquad (2.2)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – константа, равная скорости света в вакууме. Далее будет показано, что формула (2.2) отражает не случайное совпадение, а константа c имеет глубокую связь с уравнениями (§ 5).

Используя равенство (2.2), уравнения Максвелла можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{(2.3-а)} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0; & \text{(2.3-б)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, & \text{(2.3-в)} \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}. & \text{(2.3-г)} \end{cases}$$

Уравнения (2.1) или (2.3) устанавливают связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ поля, плотностью заряда и плотностью тока в каждой точке пространства в любой момент времени. Таков общий смысл любых дифференциальных уравнений в частных производных по координатам точки пространства и по времени. Все переменные величины, входящие в уравнения $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, $\varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$, математически есть функции четырех независимых переменных: трех пространственных координат и времени.

Частные производные в уравнениях имеют обычный смысл: при дифференцировании по одной из переменных остальные считаются постоянными. Частное дифференцирование по времени означает, что поле и заряд рассматриваются в неподвижной точке пространства. (Так как заряды движутся, важно помнить, что их плотность ϱ и величина ϱdV находятся именно в неподвижной точке для неподвижного объема dV.)

Уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) непосредственно применимы при изучении макроскопических потоков элементарных частиц или ионов в пустоте (например, электронные пучки, плазма и т. д.). Вообще говоря, их нельзя использовать, если система электрических зарядов расположена на телах, токи движутся по проводникам, а не непосредственно в вакууме, так как вещество существенно влияет на электромагнитное поле, на плотности токов и зарядов. Однако и при наличии тел возникает возможность непосредственного применения уравнений (2.1). В ряде очень важных случаев тела, которые определяют расположение и движение зарядов, сами не влияют на поле. Так, например, поле малых по размерам заряженных тел в воздухе рассчитывается как поле системы зарядов в вакууме; магнитное поле линейного проводника с током — как поле соответствующего тока в вакууме и т. д.

Уравнения Максвелла разделены на две пары для того, чтобы подчеркнуть наличие связей между отдельными уравнениями: второе уравнение в каждой паре следует из первого. Покажем это.

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-а):

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{div}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{div}\vec{B}$ всегда постоянна во времени. Но постоянная во времени дивергенция от произвольного переменного поля может быть только нулем. Значит, $\operatorname{div}\vec{B}=0$, что уже отражено в уравнении (2.1-б).

Точно так же, вычислив дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-в), имеем

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E}+\operatorname{div}\vec{j}=0, \tag{2.4}$$

откуда с помощью уравнения непрерывности (1.6) получаем уравнение (2.1-г).

При другом подходе к системе (2.1) можно не считать уравнение непрерывности (1.6) отдельным и независимым постулатом теории электричества. Его можно получить из уравнений Максвелла. Для этого подставим в равенство (2.4) $\operatorname{div}\vec{E}$, взятую из уравнения (2.1-г). Получаем закон сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0.$$

Как известно, имеется глубокая связь законов сохранения важнейших физических величин с симметриями пространства-времени (или иными симметриями). «Правильные» уравнения движения материальных тел или полей в любой фундаментальной физической теории (в механике, электродинамике и т. д.) содержат в себе законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда и других физических величин. В этом плане существенно важно то, что закон сохранения заряда вытекает из уравнений Максвелла. (Этот закон связан с так называемой калибровочной инвариантностью основных уравнений электродинамики.) Но сам закон шире рамок классической электродинамики; как показывает опыт, он справедлив для всех взаимодействий в природе. Поэтому к системе уравнений (2.1) обычно добавляется пятое соотношение: уравнение непрерывности (1.6). В таком случае только два из уравнений (2.1) можно считать независимыми — (2.1-а) и (2.1-в).

Заметим, что в физике не стремятся использовать непременно минимальную систему исходных положений. Если отношения между уравнениями выяснены, то обычно применяется несколько избыточная, но достаточно удобная и физически содержательная система. В электродинамике используются все четыре уравнения (2.1). Зависимые уравнения (2.1-б) и (2.1-г) несут важную физическую информацию и непосредственно применяются в ряде задач. Так, соотношение $\operatorname{div}\vec{B}=0$ истолковывается следующим образом: не существует в природе магнитных зарядов $Q_м$, создающих магнитное поле подобно тому, как электрические заряды Q создают электрическое поле.

Здесь следует сделать небольшое отступление. Как известно, элементарные магнитные диполи существуют: многие элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны и др.) обладают собственным магнитным моментом, называемым спиновым. Он не зависит от движения частицы в пространстве. Однако «монополей», т. е. положительных и отрицательных магнитных зарядов, которые образовали бы поле $\vec{B}$ по закону $\operatorname{div}\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\varrho_м$, не обнаружено, несмотря на специально поставленные многочисленные и разнообразные эксперименты.

2.2. Интегральная форма уравнений Максвелла. Графическое изображение полей. Уравнения (2.1) и (2.3) позволяют найти электромагнитное поле по расположению и движению зарядов в пространстве. Для этого требуется решить систему дифференциальных

уравнений в частных производных. Это сложная математическая проблема даже для сравнительно простых систем зарядов, хотя уравнения содержат производные только первого порядка как по координатам, так и по времени. Расчеты полей в конкретных задачах часто облегчаются, если перейти к интегральной форме уравнений Максвелла. Кроме того, интегральная форма уравнений нагляднее физически и помогает понять их смысл.

Начнем с уравнения (2.3-г). Выделим в пространстве некоторый объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Пусть внутри объема имеются заряды, распределенные с плотностью ϱ (рис. 2.1). Проинтегрируем четвертое уравнение системы (2.3) по объему V. Получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho dV.$$

В левой части полученного равенства применим теорему Гаусса и учтем, что интеграл в правой части дает заряд Q в объеме V:

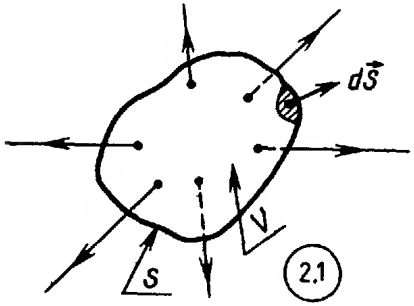
$$\oint_S \vec{E}\, \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q. \tag{2.5}$$

Величина $\vec{E}\, \overrightarrow{dS} = d\Psi$ носит название элементарного *потока* вектора напряженности электрического поля через площадку dS. Конечный поток через поверхность S выражается формулой

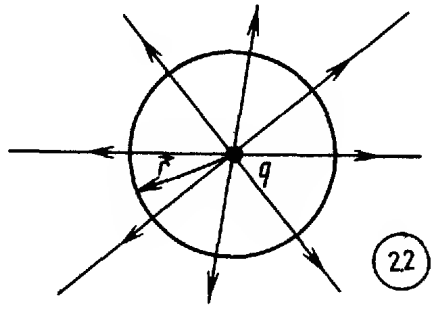
$$\Psi = \int_S \vec{E}\, \overrightarrow{dS}. \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что интеграл в формуле (2.5) есть *поток вектора напряженности* через замкнутую поверхность, окружающую заряд Q. Эта формула рассматривается как интегральное выражение, физически и математически эквивалентное четвертому уравнению Максвелла. Его часто называют теоремой Гаусса.

На рисунке 2.1 в целях наглядности поле вектора $\vec{E}$ изображается линиями. Такие рисунки делаются в соответствии с договоренностью о графическом изображении полей. Линия вектора (в данном случае напряженности) проходит в пространстве так, что вектор касателен к



2.1



2.2

ней в каждой точке. Заметим, что вдоль касательной к линии напряженности направлена также и сила $\vec{F}_э$, действующая на заряд, помещенный в поле. Поэтому линии вектора напряженности называют еще силовыми линиями. Их проводят столько, чтобы число линий, пересекающих поверхность, всюду перпендикулярную силовым линиям, было равно Ψ. Аналогично изображаются и поля других векторов.

Пример 2.1. **Поле неподвижного точечного заряда.**
Согласно закону Кулона

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}. \tag{2.7}$$

Картина силовых линий дана на рисунке 2.2. Если вычислить поток вектора по формуле (2.7) через поверхность сферы с центром в точке расположения заряда, то он окажется равным $\frac{1}{\varepsilon_0}q$, как это и требуется по теореме Гаусса (2.5).

Обратимся теперь к уравнению (2.3-б). Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к выводу: *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS} = 0. \tag{2.8}$$

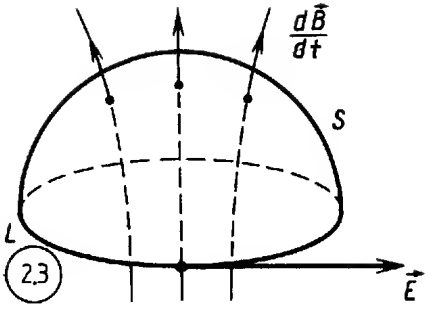
Поток вектора $\vec{B}$ через некоторую поверхность S обозначается буквой Φ:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS}. \tag{2.9}$$

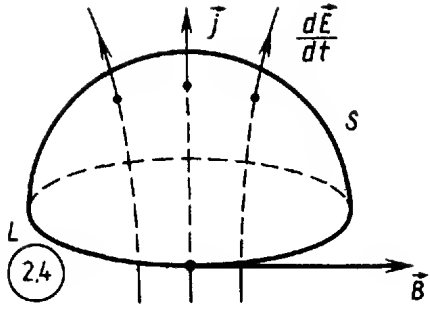
Магнитное поле изображается линиями вектора индукции $\vec{B}$. Число линий, пересекающих поверхность, всюду ортогональную направлению вектора $\vec{B}$, равно потоку вектора через эту поверхность. Из соотношения (2.3-б) или (2.8) следует, что линии индукции всегда замкнуты. Сколько линий выходит из объема V, столько же и входит в этот объем. Они не могут начинаться или заканчиваться в пределах выделенного конечного объема. Напротив, линии вектора напряженности $\vec{E}$ могут начинаться или заканчиваться в точках расположения зарядов (или уходить в бесконечность). Поэтому уравнение (2.8) также говорит об отсутствии магнитных зарядов, как и исходная формула (2.3-б).

Перейдем к уравнению (2.1-а) или (2.3-а). Для выполнения последующих преобразований рассмотрим в пространстве некоторый замкнутый контур L, стягиваемый поверхностью S (рис. 2.3). Найдем потоки векторов $\operatorname{rot}\vec{E}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ через поверхность S:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\,\overrightarrow{dS} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS}.$$



2.3



2.4

В правой части равенства переменим местами дифференцирование и интегрирование, что даст

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS}\,.$$

Учтем формулу (2.9) и получим

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\,\overrightarrow{dS} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,. \tag{2.10}$$

Фактически нет различия в производных $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{d}{dt}$ от интегральной характеристики поля Φ, не зависящей от координат точки пространства. Однако мы в этом и других аналогичных случаях сохраняем обозначение частной производной по времени, имея тем самым в виду *неподвижный* контур.

В левой части равенства (2.10) применим теорему Стокса. Приходим к равенству.

$$\oint_L \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,. \tag{2.11}$$

Вклад в интеграл дает только вихревая составляющая электрического поля. Интеграл от потенциальной составляющей равен нулю.

Это и есть первое уравнение Максвелла в интегральной форме. Выражение под знаком интеграла ($\vec{E}\,\overrightarrow{dl}$) численно равно элементарной работе электрических сил, производимой над единичным точечным зарядом, внесенным в поле. Весь интеграл равен работе по конечному замкнутому контуру L. Эта величина называется *циркуляцией* вектора $\vec{E}$ и обозначается через $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}\,\overrightarrow{dl}\,. \tag{2.12}$$

Формула (2.11) наглядно показывает, что электрическое поле, кроме составляющей с линиями напряженности, начинающимися и оканчивающимися на зарядах, имеет составляющую с замкнутыми линиями, охватывающими линии индукции переменного магнитного поля (см. рис. 2.3).

Займемся, наконец, уравнением (2.3-в). Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые привели к формуле (2.11), получим интегральное соотношение

$$\oint_L \vec{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS}, \qquad (2.13)$$

эквивалентное третьему уравнению Максвелла. Равенство (2.13) связывает циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ с величиной тока I, пронизывающего контур L, и с изменением потока напряженности электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S, опирающуюся на контур. Действительно,

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.13) свидетельствует о том, что замкнутые линии магнитной индукции охватывают линии тока и линии напряженности переменного электрического поля (рис. 2.4). В целом интегральная форма уравнений позволяет достаточно наглядно представить связь полей, зарядов, токов.

Пример 2.2. **Индукция тока в проводнике.**

Пусть поток Φ, пронизывающий контур L (см. рис. 2.3), изменяется с течением времени по закону $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$. В таком случае циркуляция вектора напряженности электрического поля по контуру определяется формулой $\mathcal{E} = \Phi\omega \cos \omega t$. Если по контуру проложен проводник, то в нем наводится ЭДС, равная $\mathcal{E}$, и, если проводник замкнут, течет индукционный ток

2.3. Связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнитных явлений. В системе уравнений Максвелла (2.3) содержатся все сведения о макроскопическом электромагнитном поле. Поэтому не удивительно, что из нее в качестве следствий вытекают отдельные законы электрических или магнитных явлений, установленные экспериментально в период, предшествующий созданию Максвеллом общей теории электромагнитного поля. Исторически эти законы явились эмпирическим базисом теории Максвелла.

Так, с формулой (2.5), а значит, и с уравнением Максвелла (2.1-г) непосредственно связан закон Кулона для взаимодействия покоящихся точечных электрических зарядов. Такие заряды создают поле, определяемое только уравнением (2.5).

Соотношение (2.11) совпадает с выражением закона Фарадея для электромагнитной индукции, если циркуляцию вектора $\vec{E}$ по контуру L назвать электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, а контур заменить проводником. Это значит, что закон Фарадея вытекает из уравнения Максвелла (2.1-а).

Формула (2.13) и соответственно уравнение Максвелла (2.1-в) отражают открытое Эрстедом магнитное действие тока и приводят к закону Био-Савара (в § 8 п. 8.2. будет показано, что закон Био-Савара есть прямое следствие уравнения 2.1-в).

Наконец, отсутствие магнитных зарядов, вытекающее из уравнения Максвелла (2.1-б), можно увязать с гипотезой Ампера о происхождении намагничивания тел за счет «молекулярных» токов в веществе.

Далее в примерах из законов Максвелла выводятся некоторые эмпирические законы электромагнетизма. Во многих задачах применяется интегральная форма уравнений Максвелла.

Пример 2.3. **Закон Кулона.**

Точечный заряд q_1 окружим сферой радиусом r с центром в точке расположения заряда (см. рис. 1.4). В силу изотропности пространства поле заряда должно обладать центральной симметрией. Линии напряженности такого поля радиальны. На поверхности сферы напряженность постоянна. Поэтому соотношение (2.5) дает

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q_1 .$$

Учитывая направление силовых линий, приходим к формуле (2.7).

Если теперь поместить в поле (2.7) другой точечный заряд q_2, то по определению напряженности (1.7) на него будет действовать сила

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (2.15)$$

Это и есть выражение закона Кулона. При выводе не учитывалось действие поля точечного заряда на этот заряд (см. § 7, п. 7.3 и § 11, п. 11.1).

Если в рассуждениях заряды поменять местами, то обнаружится, что на заряд q_1 действует сила

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

причем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Это значит, что взаимодействие зарядов подчиняется третьему закону Ньютона. Очевидно, что закон справедлив, если пространство обладает зеркальной симметрией, использованной нами при перестановке зарядов.

Пример 2.4. **Магнитное поле прямого тока.**

Используем формулу (2.13) для анализа случая, когда переменное электрическое поле отсутствует, т. е. имеются только постоянные поля и токи. Тогда для полного тока, который пересекает поверхность S и пронизывает контур L (см. рис. 2.4), из формулы (2.13) следует выражение

$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 I. \qquad (2.15\text{-а})$$

Применим соотношение (2.15-а) к бесконечно длинному прямолинейному проводнику, по которому течет ток I. В силу осевой симметрии задачи линии индукции магнитного поля являются концентрическими окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 2.5). Из формулы (2.15-а) следует равенство

$$B 2\pi r = \mu_0 I,$$

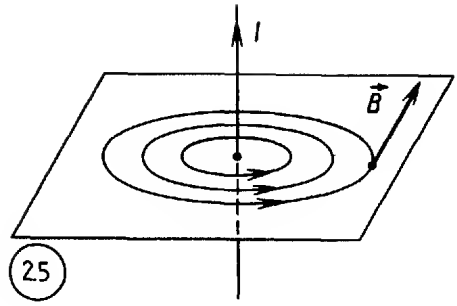
приводящее к формуле

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.5. **Ток смещения.**

Допустим, что ток через поверхность S равен нулю ($I = 0$). Уравнение (2.13) примет вид

$$\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\vec{dS}.$$



А это значит, что магнитное поле порождается не только токами, но и переменным электрическим полем. Оказывается, что имеет место двухсторонняя связь между электрическим и магнитным полями: переменное магнитное поле порождает электрическое поле, а переменное электрическое поле порождает магнитное поле. Отметим, что эта связь не вполне симметрична, так как знаки у скоростей изменения потока индукции (2.11) и потока напряженности поля (2.13) и (2.14) противоположны.

Указанная закономерность в домаксвелловскую эпоху экспериментально обнаружена не была. Правильно истолковав явление электромагнитной индукции: возникает электрическое поле при изменении магнитного,– великий физик высказал догадку, что существует и обратный процесс: возникает магнитное поле при изменении электрического. Без этой догадки полная система уравнений электромагнетизма не была бы открыта.

Следуя Максвеллу, уравнение (2.3-в) иногда записывают в виде

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_c),$$

где

$$\vec{j}_c = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

– плотность тока смещения. Это некоторый фиктивный ток, вызывающий появление магнитного поля так же, как движение реальных зарядов. На самом деле магнитное поле вызывается переменным электрическим полем.

2.4. Принцип суперпозиции полей. В физике важное значение имеют правила, по которым находятся результирующие эффекты некоторых совместных процессов взаимодействия, если эффекты отдельных взаимодействий известны. Так, в механике существует принцип независимого действия сил, приводящий к правилу их векторного сложения: если на материальную точку действует несколько сил $\vec{F}_i$, то результат действия, т. е. ускорение, определяется их векторной суммой: $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$.

В электродинамике речь идет о наложении отдельных электромагнитных полей друг на друга и о нахождении по ним результирующего поля. Пусть в одном случае движущиеся заряды ϱ_1, $\vec{j}_1$ создают поле $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$, в другом случае заряды ϱ_2, $\vec{j}_2$ создают поле $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ и т. д. Вопрос состоит в том, каким будет поле при наличии в пространстве указанных систем зарядов вместе, при их одновременном действии, выражающемся в создании поля. Ответ на него содержится в уравнениях Максвелла. В силу линейности уравнений (2.3) в рассматривае-

мом случае *векторы результирующего поля равны сумме векторов составляющих полей:*

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i,$$
$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \qquad (2.17)$$

Эти две формулы и выражают принцип суперпозиции полей при наличии нескольких зарядов.

Принцип суперпозиции полей используется в средней школе, например, для вычисления напряженности в некоторой точке поля, созданного двумя точечными зарядами; вычисляют сначала напряженности, которые созданы каждым зарядом в отдельности, а затем их векторно складывают. Аналогично применяется принцип суперпозиции и в более общем случае расчета поля сложной системы движущихся зарядов, находящихся в некотором объеме пространства V. Весь объем разбивается на элементарные объемы dV. С ними связаны бесконечно малые точечные заряды $dQ = \varrho dV$ и элементы тока $\vec{j}dV$. Далее находятся соответствующие этим малым зарядам и токам напряженности $d\vec{E}$ и индукции $d\vec{B}$, а затем они суммируются по всему объему V. Результирующее поле вычисляется по формулам

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}, \quad \vec{B} = \int_V d\vec{B},$$

в которых выражения напряженности поля точечного заряда $d\vec{E}$ и индукции поля элементарного тока $d\vec{B}$ находятся сравнительно просто.

Итак, согласно принципу суперпозиции поле системы движущихся зарядов сводится к нахождению полей, связанных с зарядами и токами во всех элементах объема пространства. Но существуют поля и в пространстве без зарядов. Рассмотрим их наложение и в этом случае.

Если в уравнениях (2.3) $\varrho = 0$ и $\vec{j} = 0$, то имеем систему линейных и однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Для таких уравнений известно свойство: любая линейная комбинация частных решений есть также решение системы. Пусть имеются частные решения $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$. Дифференциальные уравнения в частных производных допускают бесконечное множество их. Это значит, что физически реализуются, т. е. могут существовать в пространстве, поля с этими характеристиками. Но решением же будут и выражения

$$\vec{E} = \sum_i C_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i C_i \vec{B}_i,$$

где C_i – любые постоянные числа. Таким образом, согласно уравнениям Максвелла физически реализуется, т. е. может существовать в пространстве, и поле с характеристиками $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Формулировка принципа суперпозиции для свободного поля со-

стоит в утверждении: *если в пространстве, лишенном электрических зарядов, существуют поля* $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$, то может существовать и поле

$$\vec{E} = \sum_i C_i \vec{E}_i \qquad \vec{B} = \sum_i C_i \vec{B}_i. \tag{2.18}$$

Справедливо и обратное утверждение *любое поле* $(\vec{E}, \vec{B})$ *в пространстве без зарядов можно рассматривать как результат наложения полей* $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$

Важнейшим приложением принципа суперпозиции полей является разложение любого свободного поля в вакууме по плоским монохроматическим волнам. Далее будет показано, что уравнения (2.3) при $\varrho = 0$, $\vec{j} = 0$ допускают решения

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

причем постоянные векторы $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны, $k = \dfrac{\omega}{c}$ Эти решения и выражают плоские волны различной частоты и амплитуды $(\vec{E}, \vec{B})$, распространяющиеся со скоростью c по всевозможным направлениям, задаваемым вектором $\vec{k}$ Согласно принципу суперпозиции любое свободное поле сводится к системе плоских волн различных поляризаций, амплитуд, частот и направлений распространения

2.5. Задачи электродинамики. Как уже говорилось, основная задача электродинамики состоит в отыскании поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ с помощью системы уравнений Максвелла, в которые векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ входят через частные производные первого порядка по координатам и времени. Такое решение возможно, если заданы функции $\varrho = \varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$, т. е. известны плотности заряда и тока во всех точках пространства и во все моменты времени. При интегрировании дифференциальных уравнений систем (2.1–2.3) получатся решения, содержащие некоторые произвольные функции. Такова структура общего решения дифференциальных уравнений в частных производных. Для того чтобы из общего решения найти частное – конкретное поле, необходимо располагать начальными и граничными условиями.

Начальные условия – это значения величин $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во всех точках пространства в некоторый момент времени, принимаемый за начальный:

$$\vec{E}\,|_{t=o} = \vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r}); \tag{2.20}$$

$$\vec{B}\,|_{t=0} = \vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r}), \tag{2.21}$$

т. е. должны быть известны функции координат $\vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r})$ и $\vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r})$. Тогда значение поля в остальные моменты времени определяется из решения уравнений (2.1–2.3).

Граничные условия – это значения векторов поля на границе области пространства, занимаемой полем. Заданы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ как известные функции времени во всех точках некоторой поверхности:

$$\vec{E}\,|_S = \vec{E}_{\text{гр}}(t); \tag{2.22}$$

$$\vec{B}\,|_S = \vec{B}_{\text{гр}}(t). \tag{2.23}$$

Поле системы зарядов в пустоте не ограничено какими-либо конечными поверхностями. Граничные условия здесь – значения векторов поля при бесконечном удалении от системы зарядов. Физический смысл имеют только те задачи, в которых система зарядов занимает не все бесконечное пространство, а ограниченную его область. Граничные условия в них сводятся к требованию затухания поля при бесконечном удалении от системы зарядов:

$$E|_{r\to\infty}\to 0, \quad B|_{r\to\infty}\to 0. \tag{2.24}$$

(Иногда формально вводятся системы зарядов в виде бесконечной нити, поверхности и т. д. Эти случаи нуждаются в особом изучении.)

О граничных условиях будет говориться ниже в каждом конкретном случае. В частности, условия (2.24) выполняются для электрического поля точечного заряда (2.7).

Итак, *основная задача электродинамики* состоит в отыскании поля по заданному распределению и движению зарядов при известных начальных и граничных условиях. Оказывается, что при указанных условиях уравнения Максвелла имеют *единственное* решение (см. пример 3.1). В этом смысле задание состояния системы полезаряды на некоторый начальный момент времени позволяет определить ее состояние во все последующие моменты времени. Прослеживается аналогия с механикой, где по заданному состоянию системы материальных точек в начальный момент времени определяется ее состояние во все другие моменты времени.

Имеет смысл, а также практическое значение задача, *обратная* по отношению к разобранной: по заданному полю определить плотность зарядов и токов. Обратная задача решается с помощью уравнений (2.3-в) и (2.3-г) путем дифференцирования известных функций $\vec{E}(\vec{r},\ t)$ и $\vec{B}(\vec{r},\ t)$.

Кроме названных двух задач, в отдельных случаях может решаться и задача о движении заряженных тел, внесенных в поле. В самом простом случае, если влиянием поля движущихся зарядов на заряды, создающие поле, можно пренебречь, то это обыкновенная задача механики и решается она с помощью уравнения второго закона Ньютона. На заряды действует сила Лоренца, поэтому для заряженной частицы имеем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}], \tag{2.25}$$

где $\vec{p}$ может быть нерелятивистским или релятивистским импульсом

Часто оказывается необходимым найти электромагнитное поле, созданное зарядом, движущимся под действием внешнего поля. Типичный пример – *задача на рассеяние света.* Заряды, входящие в состав вещества, испытывают на себе действие светового электромагнитного поля, приходят в колебания и сами излучают электромагнитные волны – рассеивают свет. В этом случае не учитывается влияние вторичного поля на заряды, создавшие первичное

поле (например, расположенные на Солнце), однако само вторичное поле рассматривается наряду с первичным как наложенное на него

В известной мере данной задаче аналогична *задача о поле в веществе*, в которой внешнее поле перераспределяет (изменяет) токи и заряды, входящие в состав вещества, а эти заряды создают поле, накладывающееся на внешнее; образуется измененное по сравнению с начальным поле в веществе.

При решении основной задачи – интегрировании системы уравнений Максвелла – возникают большие математические трудности. Далеко не всегда прямое интегрирование уравнений возможно. Поэтому применяются различные математические методы решения. Так, вместо системы уравнений в дифференциальной форме можно воспользоваться эквивалентными интегральными соотношениями (2.5), (2.8), (2.11), (2.13). При наличии пространственных симметрий в расположении зарядов, при их простых конфигурациях интегральная форма уравнений Максвелла сравнительно просто позволяет получать решения.

При отыскании решений применяется и принцип суперпозиции: если решения для элементов заряда ϱdV и элементов тока $\vec{j}dV$ известны, то решения для непрерывной системы зарядов могут быть записаны в виде интегралов – сумм напряженностей и индукций полей, созданных элементами системы зарядов. Используются и другие методы решения системы уравнений Максвелла, о которых речь пойдет в курсе далее (метод потенциалов). По существу, все содержание электродинамики связано с решениями системы уравнений Максвелла для тех или иных систем зарядов.

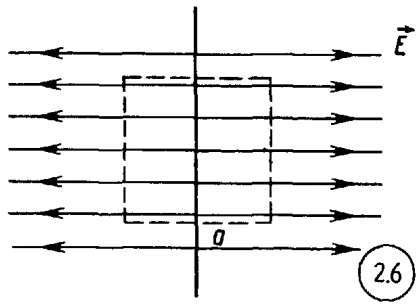
Пример 2 6 **Применение теоремы Гаусса.**

Найдем поле равномерно заряженной плоской поверхности с помощью теоремы Гаусса (2 5) Поверхностная плотность электрических зарядов постоянна и равна σ В силу симметрии поля относительно заряженной поверхности линии напряженности должны быть перпендикулярны поверхности, а поле должно быть однородным (рис 2 6) Выделяя замкнутую поверхность в виде поверхности куба и вычисляя поток вектора $\vec{E}$, имеем

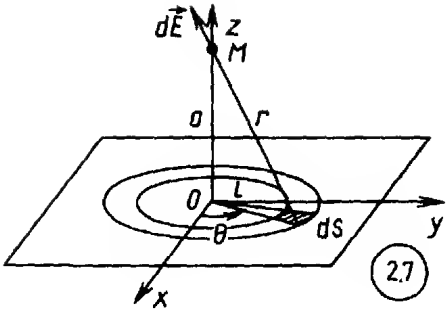
$$2Ea^2 = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0},$$

откуда

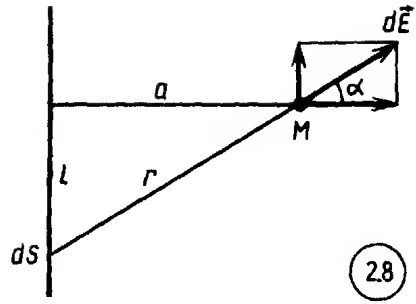
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



2.6



2.7



2.8

Пример 2.7. **Расчет напряженности с помощью принципа суперпозиции.** Найдем то же поле. Элемент поверхности (рис. 2.7, 2.8) $dS = ldld\vartheta$ несет заряд $dQ = \sigma dS$. Он создает поле, напряженность которого в точке M находится с помощью формулы (2.7). Для модуля вектора $d\vec{E}$ получим

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{\sigma ldld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(l^2+a^2)}.$$

Вклад в результирующее поле дает только перпендикулярная к поверхности составляющая:

$$dE_\perp = dE\cos\alpha = \frac{\sigma aldld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(a^2+l^2)^{3/2}}.$$

Поле, созданное всей поверхностью, имеет напряженность:

$$E = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\sigma aldld\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(a^2+l^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Интеграл взят с помощью подстановки $y = a^2 + l^2$. Составляющая поля, направленная вдоль поверхности, равна нулю. Действительно, всякой точке A можно указать симметричную ей точку плоскости B (см. рис. 2.7). Совокупный вклад зарядов точек A и B в параллельную этой поверхности составляющую напряженности $\vec{E}_\parallel$ равен нулю.

2.6. Уравнения Максвелла – Лоренца. Принцип причинности в электродинамике. Обсудим следующую общую задачу электродинамики.

Имеется замкнутая изолированная система зарядов и электромагнитного поля в вакууме. В начальный момент состояние системы задано, т. е. заданы положения и скорости заряженных частиц, векторы поля. Требуется определить (с помощью теоретических расчетов) состояние системы во все последующие моменты времени. Решение этой задачи следует искать в синтезе уравнений Максвелла и Ньютона: определяем последовательно общее поле системы, находим силы, действующие на заряды, кинематические уравнения движения зарядов, по ним снова определяем поле и т. д.

В общем случае такая задача некорректна и требует ограничений в постановке.

Во-первых, не всегда возможно выделить изолированную систему, так как существует излучение электромагнитных волн или волны могут приходить в систему извне. Следует предположить, что

внешние источники волн отсутствуют, а сама система рассматривается без излучения или на протяжении ограниченных интервалов времени, за которые ни заряды, ни поля не выходят за пределы некоторого конечного объема пространства.

Во-вторых, при ускоренном движении зарядов возникают силы «радиационного трения», которые нельзя учесть средствами механики. Этот вопрос будет специально обсужден в § 11, п. 11.1, а пока предположим, что указанными силами можно пренебречь.

В-третьих, чтобы изучать движение зарядов с помощью законов механики, необходимо использовать некоторые механические модели тел, на которых расположены заряды. В простейшем случае это свободные от связей материальные точки с массами m_i, расположенные в точках пространства $\vec{r}_i(t)$.

Для плотности зарядов и плотности токов, связанных с зарядами, справедливы выражения (см. § 1, п. 1.1)

$$\varrho_i = q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i), \qquad \vec{j}_i = q_i\dot{\vec{r}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i). \tag{2.25-а}$$

Согласно принципу суперпозиции поле найдется как сумма полей отдельных зарядов:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \qquad \vec{B}_i = \sum_i \vec{B}_i. \tag{2.25-б}$$

Учитывая линейность операций div и rot, с помощью формул (2.25-а) и (2.25-б) запишем уравнения Максвелла (2.1) для нашей системы в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\sum\limits_i q_i\dot{\vec{r}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i), \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i). \end{cases} \tag{2.26}$$

К уравнениям (2.26) нужно добавить уравнения движения материальных точек под действием силы Лоренца (предполагается, что других сил нет). Согласно уравнениям (2.25)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_i\vec{E} + q_i[\dot{\vec{r}}_i\vec{B}]. \tag{2.27}$$

Совокупность формул (2.26) и (2.27) носит название *уравнений Максвелла—Лоренца для системы зарядов и поля в вакууме.* В принципе они (при указанных выше ограничениях) отвечают на вопрос о движении зарядов и изменениях поля с течением времени и позволяют определить состояние системы по начальным условиям. На основании этих соотношений считают, что электродинамика является теорией с динамическими закономерностями. Так же, как и в механике, в электродинамике справедлив принцип причинности:

состояние системы поле-заряды в некоторый момент времени однозначно определяет состояние системы во все последующие (или предшествующие) моменты времени.

Однако точные решения системы уравнений Максвелла – Лоренца неизвестны даже при небольшом числе материальных точек. В практических задачах, например в физике плазмы, используются разнообразные приближенные методы. Уравнения (2.26), (2.27) служат также принципиальной основой при изучении электромагнитного поля в веществе.

Следует заметить, что уравнения Максвелла – Лоренца применяются к некоторой *макроскопической* механической системе зарядов, дополненной непрерывным полем. (Такой системой могут быть система точек, заряженная сплошная среда с теми или иными механическими свойствами, система заряженных тел и т. д.). Применение же этих уравнений к системе заряженных элементарных частиц в общем случае неправомерно в силу квантовых закономерностей их движения и взаимодействия.

Говоря о системе уравнений Максвелла – Лоренца, специально заметим, что взятые сами по себе уравнения Максвелла (2.1) описывают связь между полем и системой зарядов, движущихся не только под действием сил поля, но и любых других сил. Вообще, уравнения движения в систему не входят, так что это движение может быть произвольным и ограничено только условием сохранения заряда (1.6). Физически это значит, что нельзя отнести расположение и движение зарядов к действию на них только поля, созданного ими. Но что же еще определяет движение зарядов, кроме электромагнитного поля? Мы отвлеклись, рассматривая систему зарядов в вакууме, от их материального носителя – вещества, в состав которого они входят. На тела могут действовать гравитационные силы. Силы упругости, трения и др., хотя и имеют электромагнитную природу, в макроскопическом плане законами электродинамики Максвелла не описываются. Внутри же тел движение и взаимодействие микроскопических зарядов не подчиняются ни классической механике, ни классической электродинамике.

Среди сил, действующих на заряды, выделим силы непосредственного воздействия электромагнитного поля. Все остальные получили общее название – *сторонние* силы. Важно отметить, что и при наличии сторонних сил поле зарядов определяется уравнением Максвелла. Поэтому в системе уравнений Максвелла постановка вопроса о движении зарядов шире, чем в системе Максвелла – Лоренца.

§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля

3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов. Энергия и импульс – величины, универсальные для всех физических объектов, присущи и электромагнитному полю. Однако определения

кинетической и потенциальной энергии, а также импульса, данные в механике (см. [1]) для материальной точки и системы точек, отнюдь не распространяются на новый физический объект – поле. Об энергии и импульсе электромагнитного поля можно судить, опираясь на соответствующие механические величины, на законы сохранения энергии и импульса для замкнутой изолированной системы, состоящей из электомагнитного поля и электрически заряженных материальных точек. В общий баланс энергии, кроме кинетической энергии материальных точек, войдет и новая для механики величина, которую следует отождествить с энергией поля. Аналогично ставится вопрос и об импульсе поля.

Итак, рассмотрим систему заряженных материальных точек, взаимодействующих между собой. Такая система описывается уравнениями Максвелла – Лоренца (2.26) и (2.27). Пользуясь этими уравнениями, распространим понятия энергии и импульса на поле, находя величины, сохраняющиеся для изолированной системы полезаряды.

Макроскопические электрические заряды так или иначе связаны с материальными телами, на которых они расположены. Пусть частица массой m_i несет на себе заряд q_i. Тогда уравнение движения (2.27) приводится к интегралу энергии обычным для механики способом. Умножим обе части равенства на $d\vec{r}_i$. Получим

$$d\vec{r}_i \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i.$$

Здесь справа стоит работа силы Лоренца. Она совершается только ее электрической составляющей, так как работа магнитной составляющей равна нулю в силу коллинеарности векторов $\vec{v}_i$ и $d\vec{r}_i$:

$$q_i [\vec{v}_i \vec{B}] d\vec{r}_i = 0.$$

Левую часть преобразуем с помощью легко проверяемого тождества

$$\vec{v} d \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = d \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и окончательно получаем

$$d \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i. \tag{3.1}$$

Элементарная работа силы Лоренца равна приросту релятивистской (кинетической) энергии заряженной материальной точки.

Просуммируем теперь элементарные работы по всем точкам системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_i q_i \vec{E}_i \vec{v}_i. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) выражает теорему об изменении энергии системы

материальных точек за счет работы поля, совершенной над ними. Мы вывели формулу (3.2) в предположении о точечных зарядах – заряженных материальных точках. Она легко обобщается на непрерывно распределенный по пространству заряд. Для работы поля в единицу времени в таком случае с помощью формулы (1.3) имеем

$$P = \int_V \vec{E}\vec{j}dV. \qquad (3.2\text{-а})$$

Отсюда работа в единицу времени в единице объема – плотность мощности, высвобождаемой полем,– выразится формулой

$$P_0 = \vec{E}\vec{j}. \qquad (3.3)$$

Формула (3.2-а) и (3.3) для работы поля нужны потому, что система уравнений Максвелла обычно используется для модели непрерывно распределенных по пространству зарядов. Что же касается механической модели носителей зарядов, то нам в данном случае удобнее использовать дискретную модель заряженных частиц (в соответствии с левой частью формулы (3.2)).

Итак, за счет работы поля изменяется кинетическая энергия находящихся в поле заряженных частиц. Это свидетельствует о наличии у поля энергии и превращении ее в кинетическую энергию частиц.

3.2. Энергия электромагнитного поля. Плотность и поток энергии. Закон изменения энергии. Поставим задачу: найти энергию электромагнитного поля по заданным векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Для ее решения используем уравнения Максвелла и выражение для работы поля над зарядами(3.2-а). Выпишем уравнения (2.1-а) и (2.1-в):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$$

Умножим первое из них на $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$, а второе – на $\vec{E}$. Перейдем к соотношениям

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad (а)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}. \qquad (б)$$

Теперь из равенства (б) вычтем равенство (а) и получим

$$\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{rot}\vec{E}) - \vec{j}\vec{E}. \qquad (в)$$

Применяя векторное тождество (П. II, 31), можно упростить запись правой части выражения (в):

$$-\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}-\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{E})=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\,[\vec{E}\,\vec{B}].$$

Кроме того, учтем, что левую часть того же выражения можно представить в виде частной производной по времени от функции $\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$. Таким образом, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{div}\,[\vec{E}\,\vec{B}]+\vec{j}\,\vec{E}. \tag{3.4}$$

Чтобы выяснить физический смысл формулы (3.4) и входящих в нее слагаемых, полезно перейти к соответствующему интегральному соотношению.

Проинтегрируем выражение (3.4) по объему пространства V. Затем изменим порядок дифференцирования и интегрирования в левой части полученного равенства, а также преобразуем первое слагаемое в правой части с помощью теоремы Гаусса. В итоге получим

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV=\oint\limits_S\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}]\,\overrightarrow{dS}+\int\limits_V\vec{j}\,\vec{E}\,dV. \tag{3.5}$$

Интеграл

$$P=\int\limits_V\vec{j}\,\vec{E}\,dV$$

есть работа поля за единицу времени в пределах конечного объема V. Это дает основание для введения фундаментальных величин:

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{3.6}$$

– плотности энергии поля и

$$\vec{\sigma}=\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}] \tag{3.7}$$

– плотности потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга).

Выражение

$$W=\int\limits_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV \tag{3.8}$$

определяет энергию поля в заданном объеме, а интеграл

$$N=\oint\limits_S\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}]\,\overrightarrow{dS} \tag{3.9}$$

истолковывается как поток энергии через замкнутую поверхность за единицу времени. Фактически это *полная мощность* или *интенсивность излучения* системы зарядов.

После раскрытия смысла входящих в формулу (3.5) величин можно понять и ее общее содержание: равенство (3.5) оказывается математическим выражением закона изменения энергии электро-

магнитного поля. Если применить введенные обозначения (3.2-а), (3.6) – (3.9), то формула (3.5) принимает вид

$$-dW = Ndt + Pdt \tag{3.10}$$

(Так как W не зависит от координат точек поля, частную производную в формуле (3 5) можно заменить обыкновенной) Теорема читается: *убыль энергии поля в некотором объеме равна потоку энергии, выходящему из объема, и работе, совершаемой полем над зарядами в этом объеме.*

На практике используется не только интегральная форма теоремы (3.5) или (3.10), но часто и первоначальная дифференциальная форма теоремы (3.4) Во введенных обозначениях для нее имеем

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{\sigma} + \vec{j}\vec{E} \tag{3.11}$$

Плотность энергии w связана с непрерывным заполнением пространства электромагнитным полем Изменение поля в различных точках пространства – изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во времени – связано с перетеканием энергии поля из одних мест в другие Вот это-то движение энергии и учитывается с помощью вектора Умова – Пойнтинга (3 7)

Если зарядов нет, то равенство (3 11) приобретает вид

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{\sigma}$$

и выражает закон сохранения энергии свободного электромагнитного поля При наличии зарядов имеет место взаимодействие, обусловливающее обмен энергией между зарядами и полем Согласно выражению (3 11) движущиеся заряды можно рассматривать как источники энергии поля Тогда плотность мощности источника равна $\vec{j}\vec{E}$

Пусть потока энергии через границы поля нет В таком случае

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{j}\vec{E}$$

и энергия поля убывает, если $\vec{j}\vec{E} > 0$, т е заряды движутся под действием сил поля Если же $\vec{j}\vec{E} < 0$, то энергия поля растет, но в этом случае работают не силы поля, а сторонние силы, не сводящиеся к силе Лоренца Простейший пример, иллюстрирующий это явление, состоит в разделении сторонними силами разноименных зарядов, увеличении расстояния между ними, что приводит к увеличению энергии поля Энергия поля может изменяться (возрастать или убывать) и за счет убыли или роста кинетической энергии входящих в систему зарядов, что также описывается величиной $\vec{j}\vec{E}$, если заряды тормозятся, то ($\vec{j}\vec{E} < 0$) энергия поля растет, если же заряды ускоряются, то ($\vec{j}\vec{E} > 0$) энергия поля убывает (Связь энергии поля и механической энергии зарядов разобрана ниже в § 3, п 3 3)

Пример 3 1 **Единственность решения уравнений Максвелла.**

Используем выражение для энергии поля (3 8) в доказательстве единственности решения системы уравнений Максвелла при заданных ϱ и $\vec{j}$ Предположим противное Пусть имеется два решения ($\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$) и ($\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$) при одних и тех же начальных и граничных условиях В силу линейности уравнений их разность ($\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ и $\vec{B}' = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$) будет тоже решением системы, но при нулевых начальных и граничных условиях и при нулевых значениях ϱ и $\vec{j}$ Например, из соотношений

$$\operatorname{div}\vec{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \quad \operatorname{div}\vec{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

следует $$\operatorname{div}(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

Поле $(\vec{E}', \vec{B}')$ создает нулевой поток энергии через граничную поверхность (в силу нулевых граничных условий), и поэтому его энергия W' изменяться не может (заряды и токи отсутствуют) В начальный момент $W' = 0$, а поэтому W' равна нулю и во все последующие моменты времени Однако равенство

$$\frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_0 E'^2 + \frac{1}{\mu_0} B'^2\right) dV = 0$$

выполняется только при $\vec{E}' = 0$ и $\vec{B}' = 0$ Но тогда $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ и $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$, решение единственное

3.3. Закон сохранения энергии для изолированной системы поле-заряды. Рассмотрим *изолированную систему* поле-заряды. В соответствии с формулой (3.8) убыль энергии поля для некоторого конечного объема V равна выходящему через его поверхность потоку энергии и работе электрических сил над зарядами Но изолированность системы следует понимать как отсутствие потока энергии через ограничивающую ее поверхность (и отсутствие потока массы, который тоже уносил бы энергию). В таком случае формула (3.5) дает

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) dV = \int_V \vec{j}\vec{E} dV. \qquad (3.12)$$

Работа, совершаемая полем над зарядами в изолированной системе, равна убыли энергии электромагнитного поля в ней.

Вопрос об изолированности системы поле-заряды уже обсуждался в § 2, п 2 6 Вернемся к нему снова, так как теорема об изменении энергии поля позволяет освободиться от ограничения, связанного с конечностью объема V

Допустим, что в пределе $r \to \infty$ выполняются условия

$$E \sim \frac{1}{r^\alpha}, \qquad B \sim \frac{1}{r^\beta},$$

где α и β – положительные числа Поток энергии N через поверхность сферы весьма большого радиуса R

$$N \sim EBS \sim \frac{R^2}{R^{\alpha+\beta}}$$

При $R \to \infty$ он обращается в нуль, если $\alpha + \beta > 2$

Таким образом, для выполнения условия изолированности системы достаточным является условие убыли E и B быстрее, чем $\frac{1}{r}$ В таком случае слагаемое, выражающее поток энергии, исчезает, если рассматривать все бесконечное пространство, из соотношения (3 5) получаем

$$-\frac{d}{dt}\int_\infty \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) dV = \int_\infty \vec{j}\vec{E} dV \qquad (3\ 13)$$

Вернемся к формуле (3.12). Ясно, что работа, производимая над зарядами, является мерой превращения энергии поля в другие виды (какие конкретно, это зависит от модели вещества, с которым связаны заряды): в кинетическую энергию заряженных частиц или тел, потенциальную энергию деформации, внутреннюю энергию среды

и т д. В рамках рассматриваемой (простейшей) модели свободных заряженных материальных точек энергия поля переходит в кинетическую энергию частиц, как это следует из выражений (3.1) и (3.2). При дискретном распределении зарядов интеграл в правой части формулы (3 13) заменяется суммой

$$\sum_i q_i \vec{v}_i \vec{E}_i,$$

тогда согласно формуле (3.2) получаем равенство

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}},$$

из которого следует

$$\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}. \qquad (3.14)$$

В равенстве (3.14) объем V может быть конечным или охватывать все бесконечное пространство. Это соотношение выражает закон сохранения энергии в изолированной системе поле-заряды и читается следующим образом: *в изолированной системе сохраняется сумма энергии поля и релятивистской энергии заряженных материальных точек.*

Если объем бесконечен, то достаточно, чтобы выполнялось условие $E \sim \frac{1}{r^2}$, $B \sim \frac{1}{r^2}$ при $r \to \infty$. Тогда система поле-заряды может считаться изолированной. Как будет показано далее, данное условие, как правило, выполняется для конечных по размерам систем зарядов.

В § 2, п 2.5. затухание на бесконечности вводилось как граничное условие для полей в вакууме. Как сейчас становится очевидным, этим требованием обеспечивается конечность значений энергии рассматриваемых в электродинамике систем зарядов. Только такие системы имеют физический смысл.

В методическом плане существенно обратить внимание на формулу (3 14) еще в одном аспекте полная энергия системы поле заряды складывается из механической энергии материальных точек с массами m_i и энергии поля Никакой потенциальной энергии взаимодействия зарядов между собой или зарядов и поля в формуле нет Формула остается справедливой, если связи между полем и зарядами нет материальные точки не заряжены, а поле свободно Отсутствие потенциальной энергии взаимодействия – прямое следствие замены механической модели дальнодействия на полевую А если нет взаимодействия на расстоянии, то нет и энергии этого взаимодействия В концепции близкодействия энергия приписывается только материальным объектам – телам, частицам, полю В главе II будет показано, что в отдельных случаях (для статических полей) энергия поля может быть формально представлена как потенциальная энергия взаимодействия зарядов Потенциальная энергия по своей природе всегда сводится к энергии поля – это фактически значение энергии поля, отсчитанное от некоторого уровня

3.4. Импульс электромагнитного поля. Закон сохранения импульса. Выражение для импульса электромагнитного поля полу-

чим тем же методом, что и для энергии: образуем интеграл импульса для уравнения (2.25), привлекая уравнения поля (2.1).

Просуммируем все уравнения движения для заряженных материальных точек системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \sum_i (q_i\vec{E}_i + q_i[\vec{v}_i\vec{B}_i]).$$

Считая распределение зарядов по пространству непрерывным, заменим сумму справа интегралом по объему системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \int_V \{\varrho\vec{E} + [\vec{j}\,\vec{B}]\}\,dV. \qquad (3\ 15)$$

Преобразуем теперь подынтегральное выражение с помощью уравнений Максвелла, подставляя соответствующие выражения вместо ϱ и $\vec{j}$

$$\varrho\vec{E} + [\vec{j}\,\vec{B}] = \varepsilon_0\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \varepsilon_0\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{B}\right] + \frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{B}]. \qquad (3.15\text{-а})$$

Чтобы в правой части равенства (3.15-а) получить производную по времени от некоторой величины, дополним ее слагаемыми:

$$-\varepsilon_0[\vec{E}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}] - \varepsilon_0[\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}].$$

От этого равенство не нарушится, так как согласно уравнению (2.1-а) указанное выражение всегда равно нулю. Кроме того, добавим еще член, равный нулю:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B}.$$

Далее, группируя члены в правой части соотношения (3 15-а), получим

$$\varrho\vec{E} + [\vec{j}\,\vec{B}] = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0[\vec{E}\,\vec{B}] + \varepsilon_0(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - [\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}]) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - [\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}]).$$

Это выражение позволяет записать формулу (3.15) в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varepsilon_0[\vec{E}\,\vec{B}]\,dV + \int_V (\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - [\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}])\,dV + \frac{1}{\mu_0}\int_V (\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - [\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}])\,dV. \qquad (3.15\text{-б})$$

Идея дальнейших преобразований состоит в том, что второй и третий интегралы в равенстве (3.15-б) сводятся к поверхностным и они исчезают, когда интегрирование распространяется на все про-

странство, т. е. когда мы имеем дело с изолированной системой поле-заряды (см П. IV). В результате получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} + \frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_0 [\vec{E}\,\vec{B}]\,dV = 0,$$

из которого вытекают закон сохранения импульса для изолированной системы поле-заряды:

$$\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} + \int_V \varepsilon_0 [\vec{E}\,\vec{B}]\,dV = \text{const}. \qquad (3.16)$$

Величину под интегралом обозначают через $\vec{g}$, т. е

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E}\,\vec{B}]. \qquad (3.17)$$

Эта величина должна быть отождествлена с плотностью импульса поля.

Введем еще один энергетический параметр – плотность энергии в потоке $\tilde{w}$ Если движение энергии происходит со скоростью c, то произведение $\tilde{w}c$ дает нам плотность потока энергии Иными словами,

$$\tilde{w} = \frac{\sigma}{c}$$

Используя соотношение (3 7), получим для электромагнитного поля

$$\tilde{w} = \frac{1}{\mu_0 c}|[\vec{E}\,\vec{B}]| \qquad (3\ 18)$$

Сопоставляя выражения (3 17) и (3 18), находим, что

$$\tilde{w} = cg$$

Таким образом, для энергии электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве со скоростью c, существует такая же связь между энергией и импульсом, какая характерна для релятивистских безмассовых частиц $\varepsilon = cp$

В то же время очевидно, что для всей энергии поля такое соотношение не выполняется И лишь в частном случае электромагнитных волн (см главу III) соотношение (3 18) справедливо для всей энергии поля, ибо вся она в этом случае участвует в потоке

Взаимодействие между заряженными материальными точками осуществляется посредством поля. Это приводит к несохранению импульса замкнутой механической системы материальных точек, если система обменивается импульсом с полем так, что импульс поля изменяется. Как следствие, в такой системе может не выполняться третий закон Ньютона, или равенство нулю главного вектора внутренних сил Например, излучающее, рассеивающее, отражающее или поглощающее электромагнитные волны тело испытывает со стороны поля действия силы, так как импульс тела изменяется, но эта сила не имеет противодействующей: к полю не может быть приложена сила.

Обладая импульсом, электромагнитное поле оказывает давление на тела, с которыми взаимодействует Теория Максвелла предсказала давление света, рассматривая свет как электромагнитные волны. Экспериментально световое давление было обнаружено П. Н. Лебедевым в 1899 г , блестяще подтвердившим правильность теории Максвелла.

Пример 3 2 **Вычисление плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса в плоской монохроматической волне (2.19)**

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)\cos^2(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}}{\mu_0 k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E}\,\vec{B}] = \frac{\vec{k}\,\varepsilon_0}{k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)$$

Плотность энергии в потоке при скорости ее движения c равна $\frac{\sigma}{c}$, откуда $g = \frac{\vec{w}}{c}$

В потоке движется вся энергия, если $w = \vec{w}$ или

$$\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)c = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0,$$

что возможно при

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0}{2\mu_0}$$

Отсюда

$$E_0 = cB_0$$

§ 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля

4.1. Потенциалы электромагнитного поля. Для решения основной задачи электродинамики – нахождения поля – необходимо проинтегрировать уравнения Максвелла Как уже указывалось, задача прямого интегрирования уравнений во многих конкретных случаях наталкивается на значительные математические трудности Затруднительным оказывается и теоретический анализ особенностей электромагнитного поля по многим важным вопросам. Трудности в значительной мере преодолеваются при сведении уравнений поля в первых производных (система Максвелла) к хорошо изученным в математике уравнениям второго порядка путем введения вспомогательных величин – потенциалов поля.

Любое векторное поле математически определяется полностью, если заданы его дивергенция и ротор. Поэтому система уравнений Максвелла (2 1) является полной. в ней ротор и дивергенция векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определяются распределением зарядов и токов.

Напомним, что поле, для которого не равна нулю дивергенция, но равен нулю ротор, называется полем источников или потенциальным полем Линии его начинаются и оканчиваются на электрических зарядах – источниках поля. Поле, для которого не равен нулю ротор, но равна нулю дивергенция, называется вихревым или соленоидальным Линии такого поля замкнутые кривые В общем случае векторное поле может быть представлено суммой потенциальной и вихревой составляющих.

Обратимся к электромагнитному полю, описываемому системой уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Уравнения (б) и (в) системы показывают, что магнитная составляющая имеет чисто вихревой характер. Уравнение (б) $\operatorname{div}\vec{B}=0$ удовлетворяется тождественно, если ввести некоторую вспомогательную функцию $\vec{A}(\vec{r}, t)$, определяемую условием:

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{4.1}$$

В самом деле,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}\equiv 0.$$

Вектор $\vec{A}$ называют *векторным потенциалом* электромагнитного поля. Если он найден, то дифференцированием определяется $\vec{B}$. Прямой физический смысл имеет вектор $\vec{B}$ – это измеряемая величина, а векторный потенциал $\vec{A}$ – вспомогательная величина, на опыте непосредственно не измеряющаяся.

Электрическая напряженность поля, как показывают уравнения (а) и (г), имеет вихревую и потенциальную составляющие. Подберем вспомогательную величину – скалярный потенциал электромагнитного поля – так, чтобы тождественно удовлетворялось первое уравнение системы Максвелла. Подстановка выражения (4.1) в уравнение (а) дает

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Это соотношение удовлетворяется тождественно, если положить

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\varphi, \tag{4.2}$$

где $\varphi=\varphi(\vec{r}, t)$ – *скалярный потенциал* поля.

Если $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$ известны, то $\vec{E}$ однозначно определяется указанными в (4.2) операциями дифференцирования.

Итак, с помощью определений (4.1) и (4.2) вместо векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно ввести потенциалы φ и $\vec{A}$, однозначно определяющие электромагнитное поле (и уменьшающее число уравнений системы Максвелла до двух независимых). Однако из дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) по заданным $\vec{E}$ и $\vec{B}$ сами потенциалы поля φ и $\vec{A}$ определяются не однозначно, а с точностью до некоторой произвольной функции, так как потенциалы входят в эти уравнения под знаком частных производных. (Общее решение дифференциального уравнения в частных производных содержит произвольные функции независимых переменных.) Неоднозначность выбора потенциалов используется далее для упрощения уравнений поля в потенциалах и для упрощения расчетов в конкретных задачах.

Используем вместо $\vec{A}$ и φ другие потенциалы $\vec{A}'$ и φ', связанные с $\vec{A}$ и φ равенствами.

$$\left.\begin{aligned} A' &= \vec{A} + \operatorname{grad}\psi, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где $\psi = \psi(\vec{r},\ t)$ – произвольная функция

Найдем векторы поля, соответствующие потенциалам (4.3):

$$\operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B},$$

$$-\operatorname{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Вычисления показали, что векторный потенциал определен соотношениями (4.1) и (4.2) с точностью до градиента произвольной функции ψ, а скалярный – с точностью до производной по времени этой же функции. Но с физической точки зрения такая неоднозначность в определении потенциалов поля несущественна. Векторный и скалярный потенциалы в общем случае величины, физически не измеряющиеся; они вводятся как вспомогательные в целях математического удобства.

Пример 4.1. **Потенциальное поле точечного заряда.**

Покажем, что поле точечного электрического заряда описывается потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C,$$

где C – константа.

Находя напряженность по формуле (4.2), получаем известное выражение (2.7)

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Пример 4.2. **Векторный потенциал однородного поля.**

Покажем, что однородное магнитное поле может быть описано векторным потенциалом

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}\,\vec{r}],$$

где $\vec{B}$ – постоянный во всех точках пространства вектор. Действительно, с помощью формулы 30 из приложения II имеем

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}[\vec{B}\,\vec{r}] = \frac{1}{2}(-\vec{B} + 3\vec{B}) = \vec{B}.$$

4.2. Уравнения электромагнитного поля в потенциалах. Задача, поставленная в начале параграфа, состоит в придании системе уравнений Максвелла новой математической формы. Это достигается переходом от векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ к потенциалам поля φ и $\vec{A}$. Для получения уравнений поля в потенциалах выполним подстановку выражений (4.1) и (4.2) в уравнения Максвелла (2.3). Первая пара уравнений удовлетворяется тождественно (и далее не рассматривается). Уравнения (2.3-в) и (2.3-г) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \\ \Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}Q. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Первое из этих уравнений преобразуем, используя тождество (П. II, 27) и группируя члены:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right).$$

Полученное уравнение можно упростить, пользуясь неоднозначностью в выборе потенциалов. Потребуем выполнения дополнительного условия:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

которое называется *калибровкой Лоренца.* Теперь в рассматриваемом уравнении для векторного потенциала исчезает последнее слагаемое в правой части. В уравнении для скалярного потенциала член $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}$ заменим на $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Окончательно уравнения поля в потенциалах принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где потенциалы связаны с векторами поля соотношениями

$$-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B} \tag{4.7}$$

и на потенциалы наложено условие калибровки Лоренца (4.5).

Отметим важную особенность уравнений (4.6): векторный потенциал определяется только распределением токов, а скалярный — только распределением зарядов в системе. Это обстоятельство делает уравнения, по существу, независимыми, что значительно упрощает расчет поля. Кроме того, полученные уравнения однотипны и хорошо изучены в математике — это уравнения Даламбера. Решения их найдены как во множестве частных задач, так и в общем виде.

Пример 4.3. **Калибровка Лоренца.**

Установим, что калибровка Лоренца укладывается в условия неоднозначности потенциалов (4.3), т. е она не изменяет значений $\vec{E}$ и $\vec{B}$ Пусть условие Лоренца не выполняется для некоторых потенциалов $\vec{A}'$ и φ'.

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = f(\vec{r},\ t) \neq 0.$$

С помощью (4.3) перейдем к новым потенциалам

$$\vec{A} = \vec{A}' - \operatorname{grad}\psi, \quad \varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

и потребуем, чтобы условие Лоренца (4.5) выполнялось

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\operatorname{div}(\vec{A}' - \operatorname{grad}\psi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0$$

Для выполнения равенства (4.5) достаточно взять такую функцию ψ, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(\vec{r},\ t), \tag{4.8}$$

что и доказывает, что в пределах неопределенности выбора потенциалов(4.3) калибровка Лоренца (4.5) всегда возможна. Заметим, что функция ψ определена неоднозначно; к ней можно прибавить слагаемое ξ, являющееся решением уравнения

$$\Delta\xi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \tag{4.9}$$

так как

$$\Delta(\psi + \xi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(\psi + \xi)}{\partial t^2} = f(\vec{r},\ t)$$

Таким образом, и калибровка Лоренца еще не приводит к однозначному выбору потенциалов. Вместо данных выражений для $\vec{A}$ и φ можно использовать новые: $\vec{A}''$ и φ'', причем

$$\vec{A}'' = \vec{A} - \operatorname{grad}\xi,\ \varphi'' = \varphi + \frac{\partial\xi}{\partial t},$$

где ξ – любое решение уравнения (4.9). Окончательно вид функций $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$ устанавливается уже в процессе решения конкретных задач при учете начальных и граничных условий.

4.3. Понятие об общем решении уравнений поля в потенциалах. Система уравнений в потенциалах (4.6) вместе с формулами, определяющими связь векторов поля с потенциалами (4.7), эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Но в математическом отношении уравнения в потенциалах часто предпочтительнее. Главное достоинство уравнений поля в потенциалах состоит в том, что для них можно получить решение в общем виде. Поясним, как ставится и решается эта задача.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета задано расположение и движение зарядов:

$$\varrho = \varrho(\vec{r},\ t),\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{r},\ t),$$

а требуется найти векторы поля

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},\ t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r},\ t).$$

Вместо непосредственного нахождения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определим сначала потенциалы поля $\vec{A}$ и φ. Для этого мы располагаем системой (4.6), состоящей из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_x,\\
\Delta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_y,\\
\Delta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_z,\\
\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Математически эти уравнения однотипны и являются уравнениями Даламбера вида

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t). \tag{4.11}$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения в частных производных складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения, называемого волновым,

$$\Delta v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{4.12}$$

и любого частного решения исходного неоднородного уравнения (4.11):

$$u = v + u_{\text{ч}} \tag{4.13}$$

Так как векторы поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ должны быть определены однозначно, физический смысл имеют только однозначные и непрерывные вместе с первыми производными решения уравнений (4.10).

Как уравнение Даламбера, так и волновое уравнение исследованы настолько детально, что имеется возможность сразу записать общее решение. Мы не будем сейчас выписывать довольно громоздкие выражения решений, так как они непонятны без предварительного физического анализа, который проведем в следующем параграфе, а разъясним только физический смысл распадения общего решения на две части.

Первое слагаемое общего решения – общее решение волнового уравнения – оказывается выражением для электромагнитных волн, существующих в пространстве и при отсутствии электрических зарядов. Это так называемое свободное поле. Какие именно волны имеют место, зависит целиком от начальных условий.

Каждое волновое уравнение из системы (4.10) есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, а такие уравнения имеют в общем решении две произвольные функции. Для исключения произвольных функций, т. е. для перехода к частному решению в каждом конкретном случае, служат начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} \varphi|_{t=0} &= \varphi_{\text{нач}}(\vec{r}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \psi_{\text{нач}}(\vec{r}). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Аналогично для всех проекций $\vec{A}$:

$$A_x|_{t=0} = A_{x\,\text{нач}}(\vec{r}),$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = A'_{x\,\text{нач}}(\vec{r}) \text{ и т. д.}$$

Иными словами, свободное поле входит в систему на начальный момент времени как заданное в каждой ее точке. Дальнейшая его эволюция описывается решением волнового уравнения.

Второе слагаемое общего решения уравнений поля в потенциалах – частное решение уравнений (4.10) – описывает конкретное поле, создаваемое заданной системой зарядов. Частный характер этого решения означает, что для каждой конкретной системы отыскивается свое поле. В силу неоднозначности выбора потенциалов поля они определяются в ряде задач с точностью до констант, последние определяются нормировкой потенциалов.

Для замкнутой изолированной системы зарядов в вакууме граничные условия – это условия убыли потенциала с увеличением расстояния от системы зарядов:

$$\varphi|_{r\to\infty}=0, \quad \vec{A}|_{r\to\infty}=0. \tag{4.15}$$

Если заряды занимают ограниченную область пространства (вблизи от начала координат), потенциалы должны убывать при $r\to\infty$ не медленнее, нежели $\frac{1}{r}$.

После того как потенциалы определены, с помощью формул (4.7) находятся векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Тем самым задача по расчету поля оказывается решенной. Примеры решения задач на нахождение потенциалов поля приводятся в курсе далее.

§ 5. Решения уравнений поля

5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны. Ниже в параграфе отыскиваются и рассматриваются формулы решений уравнений поля в потенциалах. Задача отыскания общего решения разбита на этапы, причем отдельные части решения и частные решения имеют самостоятельное значение, так как относятся к характерным и практически важным случаям проявлений электромагнитного поля в природе и применения его в технике.

Начнем с общего решения волнового уравнения. Допустим, что электрические заряды отсутствуют, т. е. в пространстве имеет место одно электромагнитное поле. Такое поле и называют свободным. Конечно, в реальной действительности полностью исключить заряды не удается; это только модельное представление. Однако понятие свободного поля имеет важное методологическое значение, так как позволяет изучать свойства поля (как вида материи) отдельно от зарядов.

Итак, поставим задачу об отыскании потенциалов свободного поля. Для этого в системе уравнений (4.6) приравняем правые части нулю и получим четыре однотипных *волновых уравнения* вида

$$\Delta v-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \tag{5.1}$$

где через v обозначена любая из величин A_x, A_y, A_z, φ. Уравнение (5.1) допускает ненулевые решения. Это значит, что поле (в вакууме) может существовать в отсутствие зарядов.

Уравнение (5.1) получило свое название – волновое – потому что имеет решения, описывающие волновые процессы Напомним, что волной в физике называется процесс распространения в пространстве временны́х изменений некоторой величины Например, для волн в упругой среде – это распространение колебаний точек среды: каждая точка колеблется около положения равновесия, а колебания распространяются в среде в некотором направлении. Волны потенциала – это распространение некоторых значений величин φ и $\vec{A}$ от точки к точке пространства.

Для простоты рассмотрим сначала одномерный случай:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{5.2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (5.2) допускает решение в виде

$$v = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \tag{5.3}$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции аргумента $t \pm \frac{x}{c}$.

Решение (5.3) является (для одномерного случая) общим. Используя начальные условия, получаем два уравнения:

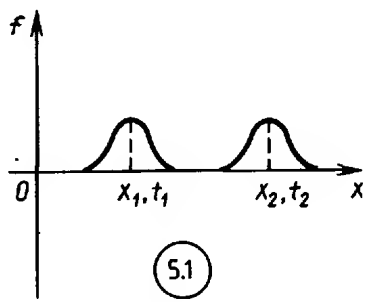
$$f_1\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2\left(\frac{x}{c}\right) = \varphi_{\text{нач}}(x),$$

$$f_1'\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2'\left(\frac{x}{c}\right) = \psi_{\text{нач}}(x),$$

откуда однозначно определяется вид функций f_1 и f_2, удовлетворяющих начальным условиям. (Более подробное изложение вопроса о плоских волнах см. [2, 3].)

Нетрудно выяснить смысл решения: это бегущие волны потенциала. Значение функции f_1, взятое для точки x_1 в какой-либо момент времени t_1, повторяется в другой момент времени t_2 в другой точке x_2 (рис. 5.1). Из условия $t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}$ имеем $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$, т. е. «возмущения» (или значения) потенциала распространяются по оси Ox в положительном направлении со скоростью c. Соответственно f_2 – волна, бегущая в противоположную сторону.

Перейдем теперь к трехмерному волновому уравнению (5.1) и будем искать его решение в виде бегущих волн:



5.1

$$v = f_1\left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right), \tag{5.4}$$

где $\vec{k}_0$ – постоянный единичный вектор произвольного направления. Прямой подстановкой доказываем, что уравнение (5.1) удовлетворяется выражением (5.4) при произвольных функциях f_1 и f_2.

Найдем геометрическое место точек, где бегущая волна потенциала имеет одно и то же значение в один и тот же момент времени. Из условия постоянства фазы $t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} = \text{const}$ следует

$$\vec{k}_0 \vec{r} = \text{const}.$$

Это уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{k}_0$. Таким образом, решение (5.4) представляет собой плоские волны, причем фронт волны движется со скоростью c, а направление движения указано вектором $\vec{k}_0$.

Заметим, что оси координат можно выбирать так, чтобы вектор $\vec{k}_0$ был коллинеарен оси Ox. Тогда $\vec{k}_0 \vec{r} = x$, и мы приходим к простым выражениям, полученным для одномерного случая, т. е. решение (5.4) фактически не является более общим, нежели (5.3).

Итак, волновое уравнение допускает решение в виде плоских волн. Решение содержит две произвольные функции, которые определяются начальными условиями. Что касается граничных условий, то в данном случае они полностью отсутствуют: в силу однородности пустого пространства никаких границ с особыми условиями в нем нет.

В процессе решения выяснена волновая природа свободного электромагнитного поля: оно может существовать только в виде волн, распространяющихся в пустоте со скоростью c.

5.2. Гармонические составляющие свободного поля. Найдем также некоторые частные решения уравнения (5.1). Используя прием разделения переменных, положим

$$v(x, y, z, t) = \varphi_x(x)\,\varphi_y(y)\,\varphi_z(z)\,f(t). \tag{5.5}$$

Подставив выражение (5.5) в формулу (5.1) и разделив полученное равенство почленно на v, имеем

$$\frac{1}{\varphi_x}\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_y}\frac{d^2\varphi_y}{dy^2} + \frac{1}{\varphi_z}\frac{d^2\varphi_z}{dz^2} - \frac{1}{c^2 f}\frac{d^2 f}{dt^2} = 0.$$

Такое равенство возможно лишь при выполнении следующих условий: каждое слагаемое равно константе, а сумма констант дает нуль. Обозначив постоянные k_x^2, k_y^2, k_z^2, $\frac{\omega^2}{c^2}$, а затем приравнивая их соответствующим членам, получим четыре однотипных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - k_x^2\varphi_x = 0, \quad \frac{d^2\varphi_z}{dz^2} - k_z^2\varphi_z = 0, \\ &\frac{d^2\varphi_y}{dy^2} - k_y^2\varphi_y = 0, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} - \omega^2 f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Причем $$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Составляя характеристические уравнения $r_i^2 = k_i^2$ для каждого уравнения системы (5.6), находим возможные частные решения с точностью до постоянного множителя:

$$\varphi_x = e^{\pm ik_x x},\ \varphi_y = e^{\pm ik_y y},\ \varphi_z = e^{\pm ik_z z},\ f = e^{\pm i\omega t}.$$

Отсюда следуют два различных решения для исходного волнового уравнения:

$$\varphi_1 = C_1 e^{\pm i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \tag{5.7}$$

$$\varphi_2 = C_2 e^{\pm i(\vec{k}\vec{r} + \omega t)}. \tag{5.8}$$

В обоих случаях

$$\omega = ck, \tag{5.9}$$

что же касается выбора знака перед i, то он несуществен.

Комплексные частные решения в отдельности физического смысла не имеют, так как потенциалы электромагнитного поля — вещественные величины. Но любая линейная комбинация частных решений (5.7), (5.8) есть также решение волнового уравнения. Воспользуемся этим свойством для построения вещественных частных решений, а также общего. Сначала получим два важных частных решения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \varphi_2 &= \varphi_{02} \cos(\vec{k}\vec{r} + \omega t), \end{aligned} \tag{5.10}$$

применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha.$$

Они описывают плоские монохроматические гармонические волны с частотой колебаний $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ и длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$; волновой вектор $\vec{k}$ направлен перпендикулярно к фронту волны. Решение φ_1 представляет собой волну, бегущую в направлении $\vec{k}$, а решение φ_2 — волну противоположного направления распространения.

Для построения общего решения волнового уравнения достаточно взять линейную суперпозицию бесконечной совокупности монохроматических волн:

$$\varphi(\vec{r},\ t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\, d\vec{k}, \tag{5.11}$$

где $\varphi_0(\vec{k})$ — комплексные коэффициенты. Решение будет вещественным при выполнении условия: $\varphi_0(\vec{k}) = \varphi_0^*(-\vec{k})$. Интегрирование в (5.11) производится по всем возможным векторам $\vec{k}$, причем $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$ и $-\infty < k_{x,\,y,\,z} < \infty$.

Формула (5.11) называется разложением свободного поля по гармоническим составляющим, оно основано на принципе суперпозиции свободных полей. Нетрудно видеть, что гармоники (5.7), (5.8) и (5.10) представляют собой основу для изучения любых свободных полей.

Решение (5.11) математически не что иное, как разложение в интеграл Фурье некоторой функции $\varphi(\vec{r},\ t)$ — решения волнового уравнения. Разложение удовлетворяет любым начальным условиям при соответствующем подборе коэффициентов $\varphi_0(\vec{k})$. Используя начальные условия (4.14), имеем

$$\varphi_{\text{нач}}(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \varphi_0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, d\vec{k},$$

$$\psi_{\text{нач}}(\vec{r}) = \frac{-i}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \varphi_0(\vec{k})\, \omega e^{i\vec{k}\vec{r}}\, d\vec{k},$$

откуда и определяются комплексные коэффициенты $\varphi_0 = a + ib$.

В качестве решения может использоваться и ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_S \varphi_{0s}\, e^{i(\vec{k}_s\vec{r} - \omega_s t)}, \tag{5.11-а}$$

однако такие решения не являются самыми общими, так как представляют собой только периодические функции для потенциалов поля.

Полученные для скалярного потенциала частные и общие решения (5.10) и (5.11) автоматически обобщаются на векторный потенциал. Например, общее решение можно записать в виде разложения по гармоникам:

$$\vec{A}(\vec{r},\ t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \vec{A}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k}. \tag{5.12}$$

Подводя итог, заметим, что свободное волновое электромагнитное поле в любом случае сводится к той или иной системе плоских гармоник (5.10) — бегущих плоских монохроматических волн, отличающихся амплитудами, частотами, направлениями распространения. Существенно важным является еще вопрос о направлении векторов $\vec{A}$ и $\vec{k}$ в плоской волне. Обсуждение этого вопроса отложим до § 9, а сейчас отметим, что волны векторного потенциала поперечны, т. е. $\vec{A} \perp \vec{k}$.

5.3. Сферические волны. В предыдущем пункте рассмотрены плоские волны, которые могут существовать в пространстве без зарядов, т. е. представляют собой пример поля, утратившего связь с зарядами. Однако предполагается, что образовалось свободное поле все же в системе, содержащей электрические заряды, а затем ушло за ее пределы. Для плоских волн система конечных размеров, их вызвавшая, должна находиться на бесконечном удалении от наблюдателя.

Рассмотрим теперь иной случай: система зарядов, излучающих электромагнитные волны может трактоваться как точечная и она находится в начале координат. Пока что мы анализируем не сам процесс излучения поля системой (он изучается в главе III), а особенности поля в свободном от зарядов пространстве. Но задача по срав-

нению с решенной в предыдущем параграфе видоизменяется: в пространстве выделена особая точка, поэтому свободное электромагнитное поле должно обладать центральной симметрией. Задачу следует решать в сферической системе координат.

Итак, решим волновые уравнения вида (5.1) для потенциалов поля в сферической системе координат, начало которой помещено в особую точку поля. Благодаря центральной симметрии потенциалы поля не зависят от углов ϑ и α (см. выражение оператора Лапласа в сферических координатах, П. II, 33). Поэтому уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему уравнению.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rv) = 0, \tag{5.13}$$

в чем легко убедиться, выполняя указанные в уравнении (5.13) действия дифференцирования и помня, что r — независимая переменная.

Но уравнение (5.13) для функции $u = rv$ есть волновое уравнение (5 2) для одномерной задачи, ее решения найдены в пункте 5.1:

$$rv = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

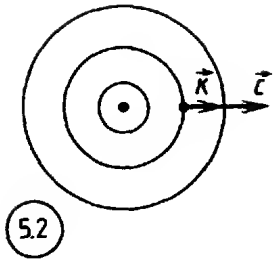
откуда

$$v = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{c}\right). \tag{5.14}$$

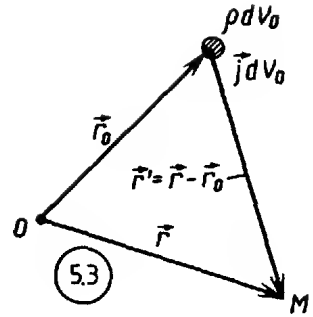
Решение уравнения (5.14) интерпретируется как две *бегущие сферические* волны: расходящаяся от точки O с амплитудой, убывающей пропорционально $\frac{1}{r}$, и вторая — сходящаяся с растущей амплитудой.

В сферических волнах в фиксированный момент времени рассматриваемые величины φ и $\vec{A}$ имеют постоянные значения на поверхности сферы с центром в начале координат — это волновой фронт данных волн. Для расходящейся волны волновой фронт движется от начала координат со скоростью c, для сходящейся — к началу координат. На рисунке 5.2 показаны фронты сферической волны через равные промежутки времени.

В отличие от плоских волн, у которых значение волнового поля сохранялось с течением времени во всех точках движущегося фронта волны, у сферических волн величины v убывают пропорционально $\frac{1}{r}$. Так как с источником поля ограниченных размеров следует связы-



5.2



5.3

вать расходящуюся волну, то далее мы будем рассматривать только расходящиеся сферические волны.

Для приложений особенно важны сферические гармонические волны. Используя результаты § 5, п. 5.2, нетрудно записать формулы для потенциалов таких волн. Например, для монохроматических волн имеем

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r}\cos(kr - \omega t),$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_0}{r}\cos(kr - \omega t), \qquad (5\ 15)$$

а разложение потенциала свободного поля по сферическим гармоникам имеет вид

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,r}\int \vec{A}_0(k)\, e^{i(kr - \omega t)}dk. \qquad (5.16)$$

(Особенность разложений (5.16) по сравнению с (5.11) и (5.12) в том, что они сводятся к одномерному случаю: векторы $\vec{k}$ и $\vec{r}$ сонаправленные.)

Подводя итоги рассмотрения формул для потенциалов свободного поля, укажем, что при переходе от потенциалов к напряженностям поля с помощью формул (4.1) и (4.2) мы получим волновые поля для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. При этом гармоники для потенциалов дадут в результате дифференцирования, содержащегося в (4.1) и (4.2), аналогичные гармоники для напряженности и индукции. (Подробно этот вопрос изучается в главе III.)

Монохроматические волны оказываются простейшими (элементарными) составляющими переменного поля: из них по принципу суперпозиции известными математическими средствами может быть построено любое свободное поле.

Обсудим также, в каких случаях используется решение в виде плоских, а в каких в виде сферических волн Как уже говорилось, плоская волна есть решение для пустого пространства, в котором все точки равноправны Сферическая волна может быть отнесена к случаю с выделенной особой точкой – центром, излучающим волны По условиям задачи особых точек может быть несколько, каждая из них рассматривается в

общем случае как источник сферических волн. Непрерывное множество особых точек может образовывать поверхность, все точки которой являются излучающими центрами

Нетрудно заключить, что решения волнового уравнения в виде сферических волн характерны для пространства, в котором, кроме электромагнитного поля, имеются тела, поверхности которых излучают сферические волны. Взаимодействие (интерференция) сферических волн приводит к дифракции первичных плоских волн, а последняя объясняется с помощью принципа Гюйгенса, выражающего количественную связь между упомянутыми системами волн (см. § 24, п. 24.3).

5.4. Потенциалы поля стационарной системы движущихся зарядов. Выше в § 5 (пп. 5.1, 5.2, 5.3) найдена первая часть общего решения уравнений поля. Приступаем к нахождению второй части — частного решения уравнений Даламбера (4.10), выражающего поле конкретной системы зарядов. Начнем с наиболее простого случая (но имеющего большую практическую ценность) — со стационарного движения зарядов, при котором плотности зарядов и токов от времени не зависят:

$$\varrho = \varrho(\vec{r}),\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}).$$

В этом случае потенциалы поля, созданного данной системой зарядов, от времени также не зависят, а уравнения поля (4.10) сводятся к однотипным уравнениям Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho; \tag{5.17}$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}. \tag{5.18}$$

Получим решения этих уравнений, не стремясь к математической строгости, а руководствуясь физически наглядными соображениями.

Прежде всего разобъем все пространство на элементы dV_0, которые будем считать точечными. В них сосредоточены элементы заряда ϱdV_0 и элементы тока $\varrho\vec{v}dV_0 = \vec{j}dV_0$. По принципу суперпозиции поле складывается из полей, созданных этими зарядами. В принципе суперпозиции полей (2.17), созданных зарядами, фигурировали векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Однако $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определены через φ и $\vec{A}$ с помощью линейных операций. Поэтому скалярно складываются φ и векторно $\vec{A}$, созданные отдельными зарядами.

Далее везде мы будем придерживаться обозначений рисунка 5.3: $\vec{r}$ или x, y, z — координаты точки пространства, в которой вычисляем поле, или кратко — координаты точки наблюдения M; $\vec{r}_0$ или x_0, y_0, z_0 — координаты точки пространства, в которой расположен заряд, или кратко — координаты заряда. По ним в наших формулах будет выполняться интегрирование, так как заряд распределен в пространстве непрерывно; $\vec{r}'$ — вектор, проведенный от точечного заряда в точку, где поле рассчитывается, т. е. в точку наблюдения M.

Рассмотрим поле, созданное бесконечно малым зарядом ϱdV_0, находящимся в точке пространства $\vec{r}_0$. Наши дальнейшие рассуждения о поле точечного заряда будут справедливы и для заряда

конечного по величине, но точечного; поэтому введем обозначение

$$q = \varrho dV_0 \tag{5.19}$$

вместо $dQ = \varrho dV_0$. Запишем уравнения поля в потенциалах (5.17) и (5.18) для этого заряда с помощью формул (2.25-а):

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \tag{5.20}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{5.21}$$

Используя тождество (П. III, 9)

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}),$$

находим, что уравнение (5.20) удовлетворяется решением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}. \tag{5.22}$$

Полученная формула (5.22) имеет широкое применение сама по себе: это потенциал поля неподвижного точечного электрического заряда.

В процессе решения дифференциального уравнения в частных производных (5 20) потенциал может быть определен с точностью до любой функции ψ, являющейся решением уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$. В самом деле, новый потенциал $\varphi' = \varphi + \psi$ в этом случае удовлетворяет уравнению (5.20). В частности, потенциал (5.22) определяют с точностью до константы. $\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} + C$. В нашей формуле (5.22) $C = 0$. Это соответствует следующей нормировке потенциала: $\varphi = 0$, если $r = \infty$.

Соответственно для векторного потенциала имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r'}. \tag{5.23}$$

Продолжим решение задачи о поле системы стационарно движущихся зарядов. Для этого вернемся к непрерывно распределенным по пространству зарядам. Потенциалы, созданные элементами тока и заряда, имеют вид

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho dV_0}{r'}; \tag{5.24}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV_0}{r'}. \tag{5.25}$$

Осталось согласно принципу суперпозиции просуммировать их по всему объему, занимаемому системой зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'} dV_0; \tag{5.26}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'} dV_0. \tag{5.27}$$

Это и есть потенциалы поля в стационарном случае. Формулы

(5.26), (5.27) и уравнения (5.17) и (5.18) являются основой раздела электродинамики, изучающего стационарные поля (см. главу II).

5.5. Запаздывающие потенциалы. Изучим теперь решение уравнений поля со временем (4.10), т. е. для произвольно движущихся зарядов. Для этого запишем их для заряда в элементе объема, окружающего точку $\vec{r}_0$ и принимаемого за точечный:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_0, \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{j}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Очевидно, что везде, кроме точки $\vec{r}_0$, уравнения (5.28) сводятся к изученным ранее (5.13) с решениями, обладающими центральной симметрией. Такие решения уже найдены: это сферические волны вида (5.14). Их в данном случае следует считать испущенными точечными источниками, помещенными в точку $\vec{r}_0$. В выражении для потенциала (см. (5.14))

$$\frac{1}{r'}f\left(t \pm \frac{r'}{c}\right)$$

отношение $\frac{r'}{c}$ показывает запаздывание (опережение) изменения поля в точке M по сравнению с точкой $\vec{r}_0$, происходящее вследствие конечной скорости распространения поля.

Однако вид функций f_1 и f_2 в формуле (5.14) не определен, мы же отыскиваем частное решение с конкретным видом функций. Для нахождения f_1 и f_2 рассмотрим малую окрестность точки $\vec{r}_0$. Пренебрегая запаздыванием значений потенциала в волне по времени, можно при $r' \to 0$ взять вместо уравнений (5.28) асимптотические уравнения Пуассона, рассмотренные ранее (5.20) и (5.21). Их решения найдены: это выражения (5.24), (5.25). В нашем случае величины зарядов в элементах объема пространства не постоянны, а зависят от времени: $\varrho = \varrho(\vec{r}_0,\ t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}_0,\ t)$. Решения в виде сферических волн (5.14) и асимптотические решения (5.24) и (5.25) должны непрерывно переходить друг в друга. Поэтому поле, созданное элементом объема пространства, будет иметь скалярный потенциал:

$$d\varphi(\vec{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)dV_0}{r'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)dV_0}{r'}.$$

Осталось просуммировать найденный потенциал по всем элементам объема пространства, где расположены заряды, чтобы получить искомое решение скалярного уравнения (4.10):

$$\varphi(\vec{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.$$

Аналогично получатся решения и для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.$$

(Интегрирование ведется по элементам объема, где находятся заряды, т. е. по точкам $\vec{r}_0$ во всем бесконечном пространстве.)

Первые слагаемые найденных потенциалов носят название запаздывающих потенциалов:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r},\ t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\\ \vec{A}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\end{aligned}\right\}\qquad(5.29)$$

а вторые — опережающих:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r},\ t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0,\\ \vec{A}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}dV_0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.30)$$

Решения (5.29) и (5.30) скорее угаданы в наших рассуждениях, а не получены в результате строгой математической выкладки. Поэтому имеет смысл проверка их справедливости. Прямая подстановка решений в исходные уравнения убеждает нас в истинности решений. Подставим скалярный потенциал из (5.29) в уравнение

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

и произведем дифференцирование под интегралом:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{\frac{1}{r'}\Delta\varrho+2\nabla\frac{1}{r'}\nabla\varrho-\frac{1}{r'c^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\right\}dV_0+$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r'}{c}\right)\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV_0=-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}).$$

Последний интеграл в левой части этого равенства согласно тождеству (П. III, 9) дает $-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})$. Следовательно, первый интеграл должен тождественно обратиться в нуль. Выполним вычисления для всех трех слагаемых под интегралом:

1) $\frac{1}{r'}\nabla\left[\nabla\varrho\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right]=\frac{1}{r'}\nabla\left[\dot{\varrho}\left(-\frac{\vec{r}'}{r'c}\right)\right]=\frac{1}{r'}\ddot{\varrho}\frac{\vec{r}'}{r'c}\frac{\vec{r}'}{r'c}+\frac{1}{r'}\dot{\varrho}\left(\frac{\vec{r}'}{c}\frac{\vec{r}'}{r'^3}-\frac{3}{r'c}\right)=\frac{1}{r'c^2}\ddot{\varrho}-\frac{2\dot{\varrho}}{cr'^2}.$

2) $2\nabla\frac{1}{r'}\nabla\varrho=-\left(\frac{\vec{r}'}{r'^3}\right)\dot{\varrho}\left(-\frac{\vec{r}'}{r'c}\right)=\frac{2\dot{\varrho}}{cr'^2}.$

3) $-\frac{1}{r'c^2}\ddot{\varrho}.$

Таким образом, подынтегральное выражение обратилось в нуль.

Подстановка (5.29) в уравнение (4.10) обратила его в тождество. Это доказывает, что формулы (5.29), (5.30) выражают решение уравнений поля. Осталось еще заметить, что они определены с точностью до любых функций ψ, $\vec{A}'$, являющихся решением соответствующего волнового уравнения. В принятом написании формул (5.29) и (5.30) потенциалы нормированы на нуль в бесконечном удалении от системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Решения в запаздывающих потенциалах имеют важный физический смысл и основополагающее для большинства задач электродинамики значение. Согласно формуле (5.29) поле в точке $M(\vec{r})$ в момент времени t определяется значениями ϱ и $\vec{j}$ в точке $\vec{r}_0$ в предыдущий момент времени $t - \frac{r'}{c}$. Таким образом, влияние зарядов и токов, создающих поле, на другие заряды и токи (внесенные в поле) передается в пустоте со скоростью c. С этой скоростью передаются изменения и возмущения поля. (Решение волнового уравнения уже привело ранее к этой скорости для распространения фазы волны или значения потенциалов φ и $\vec{A}$.)

Выводы о запаздывании являются выражением релятивистской идеи близкодействия, вытекающей в наших рассуждениях из уравнений Максвелла, а скорость распространения взаимодействия входит в уравнения через электрическую и магнитную постоянные $\left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right)$.

Итак, частное решение уравнений поля в потенциалах, отвечающее любому непрерывному распределению и движению зарядов в пространстве, найдено. Соответствующее найденным потенциалам поле и порождается непрерывной системой зарядов в вакууме. Если в соответствии с начальными условиями электромагнитных волн в пространстве нет, то решение в виде запаздывающих потенциалов для заданной системы зарядов однозначно определяет поле.

Что касается опережающего потенциала (5.30), то это решение возникло из-за симметрии уравнений электродинамики относительно обращения времени: преобразование $t \to t' = -t$ не изменяет уравнений поля в потенциалах. Однако физического смысла обращение времени в макроскопической электродинамике не имеет, инвариантность уравнений относительно замены t на $-t$ ни к каким наблюдаемым физическим явлениям не приводит. Опережающие потенциалы противоречат принципу причинности, в согласии с которым изменение заряда приводит к изменению поля и предшествует ему, а не наоборот. Поэтому решения в опережающих потенциалах нами далее не рассматриваются.

Пример 5.1. **Электромагнитное поле медленно ($v \ll c$), равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.**

В этом случае можно воспользоваться решением уравнений (5.17) и (5.18) в виде (5.22) и (5.23):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r'}$$

для каждого момента времени, т. е. для каждого мгновенного значения r'. Выбирая начало координат на траектории заряда, имеем:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Напряженность и индукция поля определяются по формулам (4.7):

$$\vec{E} \approx -\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r'^2}\,\frac{\vec{r}'}{r'}; \tag{1}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r'}\vec{v}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q[\vec{r}'\vec{v}]}{r'^3}. \tag{2}$$

Из сравнения формул (1) и (2) усматривается их связь:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\vec{E}].$$

5.6. Характерные особенности и итоги общей задачи о расчете полей. Найдем условия, при которых решения уравнений поля в потенциалах имеют физический смысл. Потенциалы должны быть конечны, т. е. интегралы в формулах (5.29), (5.30), распространенные на все пространство, должны быть сходящимися. Поместим начало координат в точку наблюдения. Тогда $\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = \vec{r}_0$. Вместо $\vec{r}'$ и $\vec{r}_0$ используем обозначение $\vec{r}$. Формулы преобразуются к виду

$$\varphi_м(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho\left(\vec{r},\ t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV,\quad \vec{A}_м(t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r},\ t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV.$$

Очевидно, что ϱ и $\vec{j}$ должны быть достаточно быстро убывающими функциями r, в противном случае интегралы расходятся.

Поле изолированной системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства, должно достаточно быстро убывать на бесконечности. Можно уточнить необходимый характер убывания φ и $\vec{A}$, привлекая на помощь формулу (3.8) для энергии поля и выражение для закона сохранения энергии (3.13), при выводе которых делалось существенное предположение об убыли $\vec{E}$ и $\vec{B}$ более быстрой, нежели $\frac{1}{r}$. Оно выполняется, если φ и $\vec{A}$ стремятся к нулю как $\frac{1}{r}$.

Проверим, как ведет себя скалярный потенциал ограниченной в пространстве системы зарядов при $r \to \infty$. Из рисунка 5.3 видно, что $r_0 \ll r'$, $r' \approx r$, так что можно взять общее запаздывание $\frac{r}{c}$. В таком случае

$$\varphi(\vec{r},\ t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int\varrho\left(\vec{r}_0,\ t-\frac{r}{c}\right)dV_0 = \frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c}\right) \sim \frac{1}{r},$$

что и требовалось. Аналогично обстоит дело и с потенциалом $\vec{A}$, модуль которого оказывается обратно пропорциональным расстоянию до системы.

Итак, потенциалы поля, а вместе с ними и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяют имеющим физический смысл граничным условиям на бесконечности для системы зарядов, занимающей конечную область пространства.

Наконец, подведем итоги решения уравнений поля в потенциалах. Общее решение складывается из системы гармонических плоских волн всевозможных направлений и частот, а также решения в запаздывающих потенциалах:

$$\varphi_{\text{общ}} = \varphi_{\text{волн}} + \varphi_{\text{зап}},$$
$$\vec{A}_{\text{общ}} = \vec{A}_{\text{волн}} + \vec{A}_{\text{зап}}.$$

Поле складывается из свободного поля и поля, созданного системой зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Было выяснено, что при наличии точечного источника имеют место сферические волны. Но на больших расстояниях любая система зарядов конечных размеров может рассматриваться как точечная, а потенциалы, ею создаваемые, как сферические волны:

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

В свою очередь, если r велико по сравнению с областью, где ведутся наблюдения, то $\frac{1}{r} = \text{const}$ и сферическая волна переходит в плоскую волну:

$$\varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поэтому плоские волны можно считать также испущенными некоторой системой зарядов, удаленной от точки наблюдения на очень большое расстояние. Обе составляющие поля – свободное поле и поле запаздывающего потенциала – можно считать имеющими общее происхождение, считать «порожденными» зарядами.

Однако далеко не всегда возможно восстановить предысторию движения и расположения зарядов за предшествующее настоящему моменту время и свести свободное поле к полю зарядов. Хорошим примером свободного поля служит так называемое реликтовое излучение, приходящее на Землю со всех точек небесной сферы. Оно было испущено зарядами на ранних стадиях образования Вселенной, т. е. 10 – 20 млрд. лет назад. Ясно, что при анализе поля, порожденного какой-либо наблюдаемой в настоящее время системой зарядов, реликтовое излучение в общем случае рассматривается как накладывающееся на поле системы, существующее независимо от нее. (Хотя по нему и получают некоторую информацию о ранних стадиях развития Вселенной.)

Второе слагаемое в общем решении – запаздывающий потенциал – соответствует полю, образованному зарядами в обозримом промежутке времени в прошлом и существующему в каждой точке

пространства в данный момент времени. Поскольку практический смысл имеет ограниченная в пространстве система зарядов, то историю ее движения – функции $\varrho(\vec{r}_0, t)$, $\vec{j}(\vec{r}_0, t)$ – необходимо знать только до некоторого начального момента времени в прошлом. Пусть R – максимальное расстояние до зарядов системы. В таком случае, зная плотности ϱ и $\vec{j}$ с момента времени $t - \frac{R}{c}$, можно в момент t и во все последующие моменты определить поле, создаваемое системой зарядов, в заданной точке наблюдения M.

На практике часто начальные условия упрощаются: до момента $t = 0$ система находилась в стационарном движении $(\varrho(\vec{r}_0), \vec{j}(\vec{r}_0))$, после чего – в нестационарном $(\varrho(\vec{r}_0, t), \vec{j}(\vec{r}_0, t))$. Поэтому в момент $t = 0$ потенциалы определяются постоянными начальными значениями, а затем – выражениями для запаздывающих потенциалов. Поле, имевшее в начальный момент статический характер, далее изменяется вместе изменением ϱ и $\vec{j}$ (с учетом запаздывания).

Наконец, типичны некоторые периодические изменения $\varrho, \vec{j}$, приводящие к периодическому же полю. В таком случае вопрос о начальном состоянии и о предыстории движения зарядов снимается.

Таковы в общих чертах итоги решения задачи электродинамики по нахождению поля в вакууме.

Методические указания и рекомендации

I. Глава I курса содержит теоретические основы классической электродинамики: в ней введены основные понятия и величины, а также основные уравнения и принципы этой науки. Все остальное содержание электродинамики составляют выводы и следствия, полученные с помощью математических преобразований при решении системы уравнений Максвелла или Максвелла – Лоренца в тех или иных случаях конкретных систем полей и зарядов.

Основополагающее положение главы I определяет и методику ее изложения и изучение курса в целом; материал должен быть подробно изложен на лекциях; при изучении остальных глав курса, где возможности для самостоятельной работы студентов более благоприятны, следует постоянно возвращаться к этой главе.

Ввиду особой важности положений, изложенных в главе как для конкретных приложений теории к частным задачам, так и для понимания природы электромагнитных взаимодействий, студентам надо знать их качественные формулировки:

– Фундаментальные понятия электродинамики – это понятия электрического заряда и электромагнитного поля.

– Заряд – свойство элементарных частиц и тел, характеризующееся величиной заряда Q. Эта величина измеряется по силовому взаимодействию зарядов и токов. Заряды создают электромагнитное поле и испытывают силовое действие поля. Справедлив закон сохранения заряда.

– Электромагнитное поле – вид материи. Любой электрический заряд связан с собственным полем, но поле может существовать и в отрыве от зарядов, в свободном состоянии, в виде электромагнитных волн.

– Поле описывается величинами электрической напряженности $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$, характеризующими силовое действие поля на пробный точечный заряд. Сила определяется формулой Лоренца.

– Связь поля с зарядами описывается уравнениями Максвелла, которые позволяют рассчитать поле по заданному расположению и движению зарядов в пространстве, а при известном поле – определить расположение и движение зарядов, создающих поле.

– Для электромагнитного поля справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в векторном сложении электрических напряженностей $\vec{E}_i$ и магнитных индукций $\vec{B}_i$ полей, созданных в данной точке пространства разными зарядами. Векторы $\vec{E}_i$ и $\vec{B}_i$ характеризуют несколько полей, существующих одновременно в данной точке.

– Уравнения Максвелла, дополненные уравнением второго закона Ньютона, составляют систему уравнений Максвелла – Лоренца, описывающую систему поле-заряды. Изучение различных частных случаев проявления состояний этой системы составляет содержание всех вопросов электродинамики.

– Задача интегрирования уравнений Максвелла в общем случае решается с помощью перехода от напряженностей к потенциалам поля. Уравнения поля в потенциалах являются уравнениями Даламбера, хорошо изученными в математике.

– Общее решение уравнений поля в потенциалах представляет собой совокупность плоских монохроматических волн всевозможных частот, амплитуд, поляризаций, направлений распространения и запаздывающих потенциалов. Основная особенность электромагнитного поля состоит в том, что его переменные значения (возмущения) распространяются в пространстве со скоростью $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

– Закон сохранения энергии и импульса для поля справедлив для изолированной системы поле-заряды. В поле могут иметь место потоки энергии, переносящие ее с одного участка на другой.

– Все частные случаи полей содержатся в указанном общем решении и сводятся к электромагнитным волнам в пространстве, утерявшим непосредственную связь с зарядами, и стационарному полю неподвижных или стационарно движущихся зарядов, к квазистационарным переменным полям (не излучающимся в пространство) и к излучаемым зарядами электромагнитным волнам.

II. В каждом разделе физики используется специфический математический аппарат. Для изучения электродинамики необходимо освоить векторную алгебру и векторный анализ (см. [3]). Чтобы

успешно работать с книгой, необходимо, по крайней мере, следующее:

– помнить наизусть определения (формулы) скалярного и векторного произведений, операций grad, div, rot (в декартовых координатах) и др.;

– уметь выполнять вычисления grad, div, rot для часто встречающихся выражений;

– помнить *основные* и уметь доказывать *все* часто встречающиеся тождества векторного анализа (П. II);

– знать свойства δ-функции (П. III).

III. Полезно в процессе изучения курса составить для себя справочник по электродинамике, т. е. необходимо заносить в особый блокнот основные формулы с их названиями.

IV. По мере изучения параграфов курса контролируйте его усвоение, отвечая на вопросы к этим параграфам.

§ 1. Какие свойства материальных объектов характеризует электрический заряд? Какими свойствами обладает эта физическая величина? Выведите формулу (1.3). Получите размерности для $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Выведите формулу (1.10). Какие поля называют потенциальными, вихревыми? Как с помощью операций векторного анализа задать дифференциальные уравнения поля? Вспомните вид уравнений Лапласа, Пуассона, Даламбера (см. [2]). Решите задачу 1 из упражнений к главе.

§ 2. Выучите уравнения Максвелла наизусть. В каких задачах применимы уравнения (2.3)? Сформулируйте принцип суперпозиции полей. Предложите несколько задач, где он используется. Являются ли дифференциальная и интегральная формы уравнений физически и математически тождественными? Изобразите графически ряд электрических и магнитных полей. Назовите законы электромагнетизма, открытые до формулировки уравнений Максвеллом. Какие основания имеются для утверждения, что электромагнитное поле является видом материи? Чем поле отличается от вещества? Сравните постановку вопроса о поле в школьном и вузовском курсах. Как перейти от интегральной формы уравнений Максвелла к дифференциальной? Обсудите направление нормали к поверхности при использовании теоремы Гаусса, направление нормали и направление обхода контура в теореме Стокса. Решите задачи 2–6.

§ 3. Проделайте самостоятельно выкладки, приводящие к формулам энергии и закону сохранения энергии поля. Назовите самые общие (философские) определения материи, движения, энергии применительно к полю, к системе поле-заряды. Назовите при выводе энергии поля исходные предположения. Обсудите вопрос о связи потенциальной энергии механической системы с энергией поля. Разберите все известные вам случаи перехода энергии электромагнитного поля в другие виды (в явлениях, механических устройствах и т. п.). Сопоставьте макроскопическую и микроскопическую (кванто-

вую) картины полей в связи с формулами энергии и импульса поля. Прочитайте об открытии светового давления в истории физики (см. [4]). Обсудите термин «поток энергии»: движется ли энергия как некая субстанция, или движется материя, обладающая энергией. Решите задачи 7 – 9.

§ 4. Вспомните свойства волнового уравнения и уравнения Даламбера (см. [2, 3]). Обсудите структуру общего решения уравнений поля в потенциалах. Почему функции φ и $\vec{A}$ должны быть непрерывными вместе со своими первыми производными? Обсудите роль начальных условий, особенности граничных условий. Свяжите структуру общего решения с конкретными полями.

§ 5. Здесь дается основной аппарат для решения большинства задач курса. Для успешного изучения его необходимо повторение ряда вопросов из методов математической физики: решение волнового уравнения и уравнения Даламбера, разложение функций в ряд и интеграл Фурье и др. Полезно ответить на ряд вопросов: что называют в физике волновым движением, волной, плоскими волнами, сферическими волнами, гармоническими волнами? Определите амплитуду, фазу, частоту, длину волны. Докажите, что общее решение уравнения Даламбера имеет указанную в тексте структуру. Покажите, что условие $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ определяет плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{k}$. Вспомните характеристическое уравнение для дифференциального уравнения. Вспомните формулы Эйлера и выразите cos, sin через экспоненту. Покажите физический смысл запаздывающих потенциалов. Обсудите связь между плоскими и сферическими волнами. Рассмотрите стандартное обозначение векторов $\vec{r}$, $\vec{r}'$ и $\vec{r}_0$ в случае, если точка M совпадает с началом координат.

Упражнения

1. Вычислить поток электрического поля через поверхность сферы радиусом r, если напряженность поля в системе с началом координат в центре сферы выражается формулой

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

2. Вычислить поток вектора однородного поля $\vec{E}$ через произвольную конечную замкнутую поверхность.

3. Вычислить поток вектора магнитной индукции поля через произвольную конечную замкнутую поверхность.

4. Найти циркуляцию вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру, используя выражение для потенциала поля.

5. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции поля по любому замкнутому контуру и показать, что в общем случае она отлична от нуля.

6. Доказать, что циркуляция вектора однородного поля $\vec{B}$ по замкнутому контуру равна нулю.

У к а з а н и е. Задачи 1–6 можно решить с помощью теорем Гаусса и Стокса.

7. Выразить работу по перемещению точечного электрического заряда в электромагнитном поле через потенциалы поля.

8. Обсудить вопрос о возможности или невозможности введения изолированной системы поле-заряды при наличии плоских электромагнитных волн.

9. Обсудить вопрос о возможности или невозможности введения изолированной системы при наличии сферических электромагнитных волн.

10. Показать, что задание ротора и дивергенции полностью определяет векторное поле.

Пусть $\operatorname{div}\vec{a}=\vec{f}_1(\vec{r})$, $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{f}_2(\vec{r})$.

Разложим исходный вектор на составляющие $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, причем

$$1)\ \operatorname{div}\vec{a}_1=f_1. \quad 2)\ \operatorname{div}\vec{a}_2=0.$$
$$3)\ \operatorname{rot}\vec{a}_1=0. \quad 4)\ \operatorname{rot}\vec{a}_2=\vec{f}_2.$$

Положим $\vec{a}_1=-\operatorname{grad}\varphi$. Тогда уравнение (3) удовлетворяется тождественно, а из уравнения (1) следует

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=f_1,$$

или

$$\Delta\varphi=f_1.$$

Последнее уравнение имеет решение

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}+\text{const},$$

тогда

$$a_1=-\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\ -\text{вектор}\ \vec{a}_1\ \text{найден}.$$

Подстановка $\vec{a}_2=\operatorname{rot}\vec{A}$ обращает уравнение (2) в тождество, а из уравнения (3) имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\vec{f}_2.$$

Дополняя выбор $\vec{A}$ условием $\operatorname{div}\vec{A}=0$, имеем

$$\Delta\vec{A}=-\vec{f}_2.$$

Это уравнение имеет решение

$$\vec{A}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|},\quad \vec{a}_2=\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

(Условие $\operatorname{div}\vec{A}=0$ не ограничивает общность, так как преобразование $\vec{A}'=\vec{A}+\operatorname{grad}\psi$ при произвольной ψ не изменяет $\operatorname{rot}\vec{A}$. Пусть

$\operatorname{div}\vec{A}=f$. Для $\vec{A}'$ имеем $\operatorname{div}\vec{A}'-\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=f$; следовательно, для выполнения равенства $\operatorname{div}\vec{A}'=0$ нужно, чтобы $\Delta\psi=-f$. Поскольку ψ — произвольный скаляр, это всегда возможно.)

Глава II
СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Выше рассмотрены общая система уравнений для электромагнитного поля и общее решение этой системы. Сейчас мы приступаем к анализу частных проявлений поля, образованного конкретными системами зарядов, в которых расположение и движение зарядов подчинены определенным ограничениям (например, заряды покоятся, движутся равномерно и т. д.). Сразу же оговорим одно условие для всех задач подобного рода. Общее решение уравнений поля в потенциалах складывается из общего решения уравнений (4.10) без правой части и частного решения этих полных уравнений — решения в виде запаздывающих потенциалов. С помощью принципа суперпозиции полей первое слагаемое — совокупность плоских волн — можно отнести к пустому пространству без зарядов; поэтому волны могут иметь место в любой задаче при любой системе зарядов и конкретно определяются начальными условиями. В задачах, где отыскивают поле зарядов, нет смысла рассматривать волновую часть решения, а следует сосредоточиться только на втором слагаемом, относящемся к полю, созданному данной системой зарядов. Иными словами, мы всякий раз решаем задачу с начальными условиями, соответствующими отсутствию волнового поля, не связанного с зарядами, данными в задаче.

§ 6. Стационарное электрическое поле в вакууме

6.1. Особенности стационарных полей. Стационарное поле возникает при условии $\frac{\partial\varrho}{\partial t}=0$ и $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}=0$, т. е. плотности токов и зарядов постоянны во времени. В этом случае уравнения поля в потенциалах (4.10) допускают независящие от времени решения, найденные ранее в § 5; они выражены формулами (5.26) и (5.27). Решения можно получить и из формул для запаздывающих потенциалов (5.29), отбрасывая зависимость величин ϱ и $\vec{j}$ от времени:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'}dV_0; \tag{6.1}$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}dV_0. \tag{6.2}$$

После вычисления потенциалов в конкретной задаче векторы стационарного поля находятся дифференцированием полученных выражений согласно определениям

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi,\ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{6.3}$$

В ряде задач целесообразно непосредственно применить систему уравнений Максвелла (2.1). Так как нас интересуют независящие от времени решения (волновое поле из рассмотрения исключено), то члены, содержащие производные по времени в уравнениях (2.1), следует отбросить. Уравнения Максвелла для стационарного поля приобретают вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0; \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Система распалась на независимые подсистемы: (6.4) – для электростатических и (6.5) – для магнитостатических полей.

Электростатическое поле по системе (6.4) есть потенциальное, линии напряженности которого начинаются и оканчиваются на зарядах; поэтому о зарядах говорят как об источниках поля. Вихревая составляющая электрического поля отсутствует. Магнитостатическое поле порождается токами и имеет вихревой (соленоидальный) характер. Важная особенность стационарных полей вытекает из разделения системы уравнений Максвелла на две независимые подсистемы (6.4) и (6.5). Соответственно электростатическое поле неподвижных электрических зарядов существует без магнитного поля и может изучаться отдельно. Что касается магнитостатического поля, то оно связано с токами зарядов, т. е. в общем случае хотя и независимо от электрического поля, но существует вместе с ним. Однако, как мы знаем из общего курса физики, в явлениях электрического тока в проводниках практическое значение вне проводника имеет одно магнитное поле, которое поэтому исследуется отдельно от электрического.

6.2. Уравнения стационарного электрического поля в потенциалах. Постоянное электрическое поле существует при неподвижных зарядах, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$ и $\vec{j} = 0$, или стационарно движущихся зарядах, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$ и $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$.

В первом случае токи отсутствуют, а во втором имеют во всех точках пространства постоянную во времени плотность.

В случае неподвижных зарядов стационарное электрическое поле называют электростатическим. Каких-либо особенностей у него по сравнению со стационарным полем нет, и термин можно употреблять в более общем смысле, если $\varrho = \varrho(\vec{r})$.

Ранее мы отметили, что отделение зарядов от тел, на которых они сосредоточены, является полезной идеализацией, допустимой при условии, что влиянием на поле зарядов, входящих в состав тел, можно пренебречь (см. § 2, п. 2.1). Но влиянием тел на расположение и движение зарядов пренебречь нельзя. Это особенно отчетливо видно в электростатическом случае. Так, покоящиеся свободные заряды вообще не могут существовать, ибо силы взаимодействия между ними, передаваемые электростатическим полем, приведут их в ускоренное движение. Точно так же невозможно и равномерное движение свободных зарядов (постоянный ток) под действием одних электростатических сил. Именно тела и вещественные среды (благодаря электромагнитным взаимодействиям, выходящим за пределы электростатических и даже вообще за пределы взаимодействий, описываемых системой Максвелла – Лоренца и подчиняющихся квантовомеханическим законам) обеспечивают связи свободных зарядов, задающие их положение и ограничивающие их перемещение в пространстве. Но природу этих связей при изучении стационарных полей в электродинамике мы не рассматриваем. Их наличие учитывается заданием конфигураций зарядов и токов, т. е. функциями $\varrho(\vec{r})$ и $\vec{j}(\vec{r})$.

Для стационарного поля, кроме дифференциальных уравнений (6.4), справедливо и интегральное уравнение

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q, \tag{6.6}$$

носящее название теоремы Гаусса и часто применяемое для расчета полей при некоторых симметричных распределениях заряда в пространстве.

Уравнение для потенциала электростатического поля следует из уравнений (4.10), если считать величины ϱ и φ независимыми от времени:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho. \tag{6.7}$$

Это уравнение известно в математике как уравнение Пуассона. Мы уже знаем его частное решение (6.1). Для получения общего решения уравнения (6.7) к частному решению (6.1) следует добавить общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0, \tag{6.8}$$

которое называется уравнением Лапласа.

В задачах на электростатическое поле в вакууме обычно используется решение $\tilde{\varphi} = 0$, что означает отсутствие иных постоянных полей, кроме того, что создает заданная система. Но уравнение Лапласа имеет самостоятельное применение для нахождения электростатического поля в пространстве без зарядов, удовлетворяющего определенным граничным условиям.

Итак, в разных случаях для расчета электростатического поля сле-

дует пользоваться либо формулами (6.1) и (6.6), либо уравнениями (6.7) и (6.8). Для непрерывной системы зарядов в вакууме физический смысл имеют только всюду непрерывные (вместе с производными), однозначные, ограниченные их решения.

Пример 6.1. **Вычисление потенциала и напряженности поля однородно заряженного шара.**

Пусть радиус шара равен a, плотность заряда ϱ.

С помощью формулы (6.1) запишем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$

Вычисления проведем в сферической системе координат $\vec{r}(r, \vartheta, \alpha)$ (рис. 6.1):

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \sin\vartheta_0 \, dr_0 d\vartheta_0 \, d\alpha_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0}}.$$

Сначала интегрируем по α_0

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r_0^2 \sin\vartheta_0 \, dr_0 d\vartheta_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0}}.$$

Для выполнения интегрирования по ϑ_0 делаем подстановку:

$$t^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\vartheta_0.$$

Теперь при $r \geq a$:

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r} \int_0^a r_0 \, dr_0 \int_{r-r_0}^{r+r_0} dt = \frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

При $r < a$ интервал интегрирования следует разделить на две части: $r_0 \geq r$ и $r_0 \leq r$ Тогда

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r} \left\{ \int_0^r r_0 \, dr \int_{r-r_0}^{r+r_0} dt + \int_r^a r_0 \, dr \int_{r_0-r}^{r_0+r} dt \right\} = \frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}.$$

Потенциал поля обладает сферической симметрией, т. е. не зависит от углов ϑ и α

При вычислении напряженности пользуемся формулой $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$: вне шара

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

внутри шара

$$\vec{E} = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho$ – заряд всего шара, а $Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$ – заряд, находящийся внутри шара радиусом r.

Пример 6.2 **Непосредственное интегрирование уравнения для потенциала.**

Решим задачу из примера 6.1 с помощью интегрирования уравнений поля (6.7) и (6.8).

В сферической системе координат имеем исходные уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad 0 < r \leq a; \tag{1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=0,\ r>a. \tag{2}$$

Вводя подстановку $U=r^2\dfrac{d\varphi_1}{dr}$, разделим переменные в уравнении (1), получим

$$dU=-\frac{\varrho r^2}{\varepsilon_0}dr.$$

Интегрируя, находим U:

$$U=-\frac{\varrho r^3}{3\varepsilon_0}+A_1,$$

где A_1 – постоянная интегрирования. Возвращаясь к исходной переменной φ_1, имеем для нее уравнение

$$d\varphi_1=-\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}dr+\frac{A_1}{r^2}dr,$$

которое также непосредственно интегрируется:

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}-\frac{A_1}{r}+B_1. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) выписываем по аналогии с выражением (3):

$$\varphi_2=-\frac{A_2}{r}+B_2. \tag{4}$$

Найдем постоянные интегрирования в выражениях (3) и (4). Чтобы устранить бесконечные значения потенциала в точке $r=0$, следует положить $A_1=0$. Нормируем φ_1 условием: $\varphi_1|_{r=0}=0$, откуда и $B_1=0$. Выражение (3) упростилось:

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Далее необходимо написать условия непрерывности потенциалов и их производных на границе шара. Из них находим значения оставшихся двух постоянных:

$$A_2=-\frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0},\qquad B_2=-\frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0}.$$

Для потенциалов поля окончательно имеем выражения

$$\varphi_1=-\frac{\varrho r^2}{6\varepsilon_0},\qquad \varphi_2=-\frac{\varrho a^2}{2\varepsilon_0}+\frac{\varrho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

приводящие к тем же напряженностям поля вне и внутри шара, что и в примере 6.1.

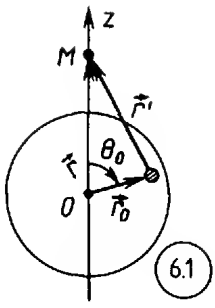
Пример 6.3. **Применение теоремы Гаусса.**

Совсем просто решается рассмотренная выше задача с помощью теоремы Гаусса (6.6). В силу симметрии распределения зарядов по условиям задачи на любой сфере радиусом r и центром в центре шара напряженность поля $\vec{E}$ постоянна по модулю и направлена по радиусу (от центра или к центру). Дальнейшие вычисления несложны:

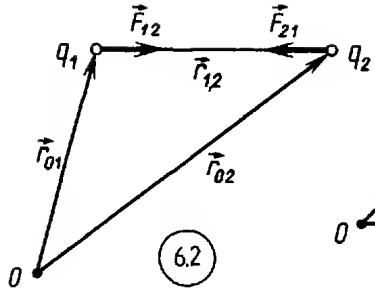
$$\oint E dS=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_r,$$

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_r,\ E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_r}{r^2},$$

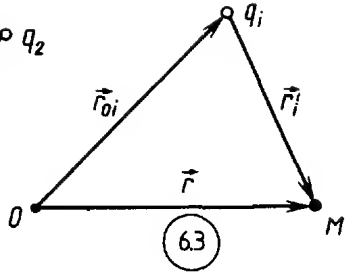
где Q_r – заряд внутри сферы.



6.1



6.2



6.3

Пример 6.4. **Нахождение поля при непрерывно распределенном заряде.**
Вычислим потенциал поля заряда, непрерывно распределенного по всему пространству с плотностью

$$\varrho(r_0) = \varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}}.$$

По формуле (6.1)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(r_0)}{r'} dV_0,$$

интеграл берется по способу, описанному в примере (6.1).

$$\varphi(r,\ \vartheta,\ \alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}} r_0^2 \sin\vartheta_0 dr_0 d\vartheta_0 d\alpha_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r\, r_0 \cos\vartheta_0}}.$$

При интегрировании выделяются две области пространства: где $r_0 \geq r$ и $r_0 < r$. Получаем ответ:

$$\varphi(r) = \frac{\varrho_0 R^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{2R}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{R}}\right) - e^{-\frac{r}{R}}\right],$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\varrho_0 R^2}{\varepsilon_0}\left[-\frac{2R}{r^2}\left(1 - e^{-\frac{r}{R}}\right) + \frac{2}{r}e^{-\frac{r}{R}} + \frac{1}{R}e^{-\frac{r}{R}}\right]\frac{\vec{r}}{r}.$$

Вычисления значительно упрощаются, если напряженность находить по теореме Гаусса:

$$\oint E_r dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \varrho_0 e^{-\frac{r_0}{R}} dV_0.$$

Вычисляя интеграл в левой части равенства аналогично примеру 6.3, в сферических координатах, имеем

$$4\pi r^2 E_r = 4\pi\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} dr_0.$$

Интеграл в правой части легко берется по частям:

$$\int_0^r r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} dr_0 = -R\left[r_0^2 e^{-\frac{r_0}{R}} - 2R\left(-r_0 e^{-\frac{r_0}{R}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - Re^{-\frac{r_0}{R}}\right)\right]\Big|_0^r = -R^2\left[-2R\left(1 - e^{-\frac{r}{R}}\right) + 2re^{-\frac{r}{R}} + \frac{r^2}{R}e^{-\frac{r}{R}}\right],$$

после чего приходим к полученному ранее выражению для напряженности поля. Она

оказывается на бесконечном удалении от точки с наибольшей плотностью заряда, такой, какую создал бы точечный заряд, равный шести зарядам сферы радиусом R и плотностью ϱ_0:

$$E_\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{6Q}{r^2}.$$

6.3. Электростатическое поле и закон Кулона. На практике часто применяется модель точечного электрического заряда. Во-первых, им заменяется заряженное тело, если размеры тела малы по сравнению с расстояниями до точки, в которой рассматривается поле. Во-вторых, в качестве точечного заряда может рассматриваться заряд элемента объема заряженного тела при определении поля, созданного телом.

Потенциал и напряженность поля точечного заряда нами уже находились как решения уравнений Максвелла в интегральной форме и решения уравнений поля в потенциалах (формулы (2.7) и (5.22)). Однако для электростатического поля может быть осуществлена и другая логическая последовательность изложения материала, применяемая, в частности, в школьном курсе. В основу ее кладется закон Кулона для взаимодействия двух точечных зарядов (выведенный нами из уравнений Максвелла):

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}.$$

Формула соответствует рисунку 6.2.

Мы введем здесь и используем далее в курсе обозначение, упрощающее запись многих формул:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}. \tag{6.9}$$

Условно назовем k кулоновской постоянной.

Итак, ядро электростатики составляет закон Кулона. По определению напряженности поля (1.7) для точечного заряда, расположенного в точке $\vec{r}_0 = 0$, имеем

$$\vec{E} = k\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}. \tag{6.10}$$

Если ввести потенциал поля формулой

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

то для точечного заряда имеем

$$-\,k\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Умножая обе части последнего равенства на $d\vec{r}$ и интегрируя, получим

$$\int \operatorname{grad}\varphi\, d\vec{r} = -kq\int \frac{\vec{r}\,d\vec{r}}{r^3},$$

$$\varphi = k\,\frac{q}{r} + C.$$

Постоянная интегрирования выбирается из условия нормировки $\varphi|_{r\to\infty}=0$. В итоге имеем уже известную формулу потенциала поля точечного заряда:

$$\varphi = k\frac{q}{r}. \tag{6.11}$$

Для любой совокупности дискретных точечных зарядов q_i потенциал и напряженность поля находятся с помощью принципа суперпозиции — наложения полей отдельных зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i'},\quad \vec{E}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{(r_i')^2}\frac{\vec{r}'}{r'}. \tag{6.12}$$

(Обозначения см. на рис. 6.3.) Аналогично находятся эти величины для системы зарядов, распределенных непрерывно с плотностью $\varrho(\vec{r}_0)$. Надо лишь разбить систему на элементарные точечные заряды $dQ=\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0$. В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= k\int\frac{\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0}{r'},\\ \vec{E}(\vec{r}) &= k\int\frac{\vec{r}'\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0}{(r')^3}.\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

(Обозначения см. на рис. 5.3.)

Конечно, рассмотренный сейчас подход к описанию поля гораздо у́же общего подхода, основанного на уравнениях Максвелла, и годится только для электростатического поля. В статическом случае именно точечный заряд рассматривается как некий элементарный источник поля, что весьма наглядно в методическом плане, так как связь поля с зарядами выражается простыми формулами (6.10) и (6.11). Однако в общем случае благодаря явлению запаздывания такая связь чрезвычайно сложна и как исходное теоретическое ядро электродинамики не применяется. Самой простой и универсальной оказывается связь между плотностями токов и зарядов в каждой точке пространства, с одной стороны, и изменением векторов поля в пространстве и времени — с другой. Она и отражена в уравнениях Максвелла.

6.4. Электростатическое поле системы зарядов на большом удалении. Дипольный момент системы.

Несмотря на теоретическую ясность и простоту решения вопроса об электростатическом поле системы зарядов, рассмотренного в предыдущем параграфе, практическое значение формул (6.12) или (6.13) невелико. Их прямое применение возможно лишь в случае систем с небольшим числом точечных зарядов либо с простой зависимостью плотности заряда от положения в пространстве. В противном случае вычисления сумм и интегралов в формулах могут оказаться слишком громоздкими.

Рассмотрим поле системы точечных или непрерывно распределенных зарядов по некоторому конечному объему пространства на

большом расстоянии от системы, так что $r \gg r_0$ (рис. 6.4). В этом случае формулы для потенциала и напряженности поля могут быть взяты в приближении и значительно упрощены, а вся система охарактеризована одним или двумя электрическими параметрами, определяющими поле системы (вместо задания полного распределения зарядов).

Получим приближенное значение потенциала в точке $M(\vec{r})$ с помощью формулы (6.13), для чего разложим функцию $\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ в ряд по степеням малой величины $\vec{r}_0$. Выкладку удобно провести в декартовых координатах, причем для сокращения записей введем обозначения: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\alpha = 1, 2, 3$. Функция

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - x_{0\alpha})^2}}$$

может быть разложена по степеням малых величин $x_{0\alpha}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) x_{0\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) x_{0\alpha} x_{0\beta} + \ldots$$

При подстановке последнего выражения в формулу (6.13) получим так называемое мультипольное разложение потенциала:

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_{V_0} \frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r} dV_0 - k\int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 \sum_\alpha x_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) + \\ + \frac{k}{2}\int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 \sum_{\alpha\beta} x_{0\alpha} x_{0\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Вынесем из-под интегралов величины, не содержащие переменных интегрирования, снабженных индексом 0; во втором и третьем слагаемых поменяем местами суммирование по индексу с интегрированием:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{r}\int_{V_0} \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 - k\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\int_{V_0} x_{0\alpha}\varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 + \\ + \frac{k}{2}\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\int_{V_0} x_{0\alpha} x_{0\beta}\varrho(\vec{r}_0)\, dV_0. \qquad (6.14)$$

В формуле (6.14) первое слагаемое можно назвать нулевым приближением для потенциала системы. Очевидно, что в этом приближении весь заряд системы считается сосредоточенным в точке O.

Второе слагаемое дополняет потенциал до приближения, называемого дипольным. Оно может быть записано в векторной форме:

$$k \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \int_{V_0} \vec{r}_0 \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0.$$

Величину

$$\vec{p} = \int_{V_0} \vec{r}_0 \varrho(\vec{r}_0)\, dV_0 \tag{6.15}$$

называют *дипольным моментом* системы. Для системы n точечных зарядов дипольный момент выражается формулой

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{0i} q_i. \tag{6.16}$$

Третье слагаемое в формуле (6.14) называется квадрупольным приближением (см. ниже). Обычно при разложении поля системы зарядов по мультиполям на большом расстоянии от нее ограничиваются квадрупольным приближением, а во многих задачах — дипольным.

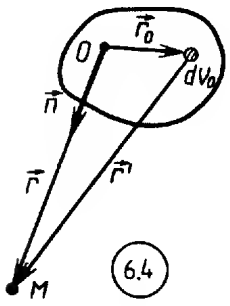
С введением дипольного момента второе слагаемое потенциала системы в соотношении (6.14) выражается формулой

$$\varphi_{\text{д}}(\vec{r}) = -k\vec{r} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = k\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}. \tag{6.17}$$

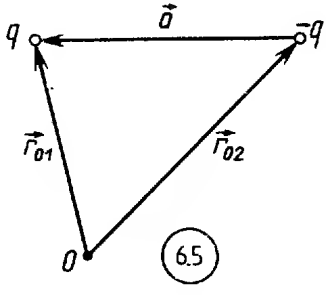
Вводя единичный вектор направления на точку наблюдения $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, получаем

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\,\vec{n}}{r^2}. \tag{6.18}$$

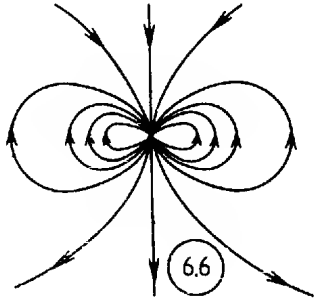
На практике особое значение имеют электронейтральные системы. Таковы атомы и молекулы в нормальном состоянии, незаряженные тела представляют собой электронейтральные системы зарядов. Поле электронейтральной системы, если не учитывать следующие члены разложения, определяется дипольным приближением (6.17). Найдем напряженность поля в дипольном приближении:



6.4



6.5


6.6

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla k\frac{\vec{r}\,\vec{p}}{r^3}.$$

После выполнения вычислений (см. формулы П. II)

$$\vec{E} = k\frac{3\vec{n}(\vec{n}\,\vec{p}) - \vec{p}}{r^3}. \tag{6.19}$$

Отсюда видно, что напряженность поля в дипольном приближении убывает пропорционально кубу расстояния до системы.

Нетрудно доказать, что для электронейтральной системы дипольный момент не зависит от выбора начала координат (см. пример 6.5). Дипольный момент – важная электрическая характеристика системы в целом. Как поле системы, так и действия внешнего поля на систему (это будет показано ниже, в § 7, п. 7.2) определяются ее дипольным моментом.

Рассмотрим третье слагаемое потенциала в формуле (6.14). Матрицу

$$D_{\alpha\beta} = \int\limits_{V_0} x_{0\alpha}x_{0\beta}\,\varrho(\vec{r}_0)\,dV_0 \tag{6.20}$$

для непрерывно распределенного заряда системы, или матрицу

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_{0\alpha}\,x_{0\beta}\,q_i \tag{6.21}$$

для системы n точечных зарядов называют *квадрупольным моментом* системы. Квадрупольный член в разложении потенциала (6.14) выражается формулой

$$\varphi_{\text{квд}} = \frac{k}{2}\sum_{\alpha,\,\beta} D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{6 22}$$

откуда видно, что $\varphi_{\text{квд}}$ пропорционально $\frac{1}{r^3}$; соответственно напряженность поля убывает пропорционально четвертой степени расстояния до системы зарядов. Квадрупольный момент определяет поле электронейтральной системы с нулевым дипольным моментом.

В заключение заметим, что для системы электрических зарядов с $\sum\limits_i q_i \neq 0$ всегда можно выбрать начало координат в точке

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_i q_i\vec{r}_{0i}}{\sum\limits_i q_i};$$

тогда в этой системе отсчета $\vec{r}_c = 0$ и $\vec{p} = 0$. Квадрупольный же момент в этом случае не обязательно нулевой.

Пример 6.5. **Дипольный момент системы двух точечных, равных по модулю и противоположных по знаку зарядов.**

С помощью формулы (6.16) и рисунка 6.5 имеем

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_{01} + q_2\vec{r}_{02} = q(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) = q\vec{a}.$$

Значение $\vec{p}$ не зависит от выбора точки O. Такой диполь может рассматриваться как элементарный для электронейтральных систем точечных зарядов; из диполей отдельных пар складывается момент системы, поэтому он и не зависит от выбора начала координат.

Покажем, что дипольный момент системы зарядов, обладающей центром симметрии, равен нулю.

Помещая начало координат в центр симметрии, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i = 0.$$

Пример 6.6. **Выражение для потенциала и напряженности поля диполя с моментом $\vec{p}$ в сферических координатах.**

Направляя ось Oz по вектору $\vec{p}$, с помощью формул (6.17) и (6.19) имеем

$$\varphi(r, \vartheta) = k\frac{p\cos\vartheta}{r^2}, \quad E_r = k\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = k\frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_a = 0.$$

Картина силовых линий диполя изображена на рисунке 6.6.

§ 7. Работа и энергия электростатического поля. Сила, действующая на жесткую систему зарядов

7.1. Система зарядов во внешнем электростатическом поле. Работа и потенциальная энергия. Перейдем к изучению энергетических соотношений для электростатического поля. Прежде всего найдем работу, которую совершает сила, действующая со стороны поля на заряд, помещенный в поле. Этот вопрос в общем виде рассматривался в § 3, п. 3.1, а сейчас выясним его применительно к частному случаю постоянного потенциального поля $\vec{E}$. Напомним, что в поле вносится точечный заряд, не изменяющий поля. Поле по отношению к нему является внешним, т. е. создано другими зарядами. Элементарная работа поля по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле определяется формулой

$$\delta A = q\vec{E}d\vec{r} = -q\,\mathrm{grad}\,\varphi d\vec{r} = -qd\varphi, \tag{7.1}$$

а работа поля на конечном перемещении —

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.2}$$

Таким образом, работа определяется разностью потенциалов точек начала и конца перемещения и не зависит от траектории. Разность потенциалов в электростатическом поле оказывается измеряемой физической величиной, однозначно связанной с работой, и наряду с напряженностью служит важной характеристикой поля.

В соответствии с формулой (7.2) целесообразно введение понятия потенциальной энергии заряда в точке поля:

$$U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}). \tag{7.3}$$

Формула (7.3) обобщается на систему зарядов во внешнем поле:

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_i q_i \varphi(\vec{r}_i), \\ U &= \int_V \varrho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dV. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

(Если заряды, создающие поле, не рассматриваются в задаче, то необходимость в различных обозначениях для точек пространства $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ отпадает. Поэтому в формулах (7.3), (7.4) и использовано единое обозначение для координат точки пространства, в которой указан потенциал $\varphi(\vec{r})$ и задан заряд $\varrho(\vec{r})$.)

Если внешнее поле $\varphi(\vec{r})$ изменяется достаточно плавно, а размеры системы невелики, то для любой точки $\vec{r}$ в пределах системы выполняется неравенство (рис. 7.1)

$$\left|\frac{\varphi(\vec{r}_0+\vec{r})-\varphi(\vec{r}_0)}{\varphi(\vec{r}_0)}\right| \ll 1. \tag{7.5}$$

Неравенство (7.5) служит условием применимости интегральных характеристик системы – полного заряда, дипольного момента – для приближенного описания ее взаимодействия с внешним полем.

Выбирая некоторую точку $\vec{r}_0$ внутри системы (рис. 7.1), имеем для потенциала приближенное выражение

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0+\vec{r}') \approx \varphi(\vec{r}_0) + \vec{r}'\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}_0) + \ldots$$

Подставим это разложение в формулу (7.4):

$$U = \varphi(\vec{r}_0)\sum_i q_i - \vec{E}(\vec{r}_0)\sum_i \vec{r}_i' q_i + \ldots \tag{7.6}$$

Первое слагаемое совпадает с величиной энергии точечного заряда $\sum_i q_i$ – система принимается за точку, помещенную в точку пространства $\vec{r}_0$. Для заряженной системы при условии (7.5) этой величиной в разложении (7.6) можно ограничиться. Но для электронейтральных систем $\sum_i q_i = 0$; в расчет принимается основное теперь второе слагаемое

$$U(\vec{r}) = -\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r}_0), \tag{7.7}$$

т. е. потенциальная энергия определяется дипольным моментом системы $\vec{p}$ и напряженностью внешнего поля, в точку $\vec{r}_0$ которого малая (точечная) система помещена.

7.2. Силы, действующие на жесткую систему зарядов во внешнем поле. Формулы (7.6) и (7.7) предыдущего параграфа дают выражения для энергии системы зарядов через ее интегральные характеристики – заряд системы и ее дипольный момент. Нужно сделать, однако, важную оговорку: формулы имеют смысл, если положение зарядов в системе фиксировано; система как целое определена некими связями между зарядами неэлектростатического происхождения, т. е. дипольный момент ее не изменяется, когда она вносится во внешнее поле. С учетом этих обстоятельств можно поставить вопрос о силе, действующей на систему зарядов как на твердое тело. Она равна равнодействующей сил, действующих на отдельные заряды:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i.$$

В приближении точечной системы

$$\vec{F} = \vec{E}(\vec{r}_0) \sum_i q_i.$$

Силу, действующую на электронейтральную систему, характеризующуюся дипольным моментом $\vec{p}$, проще всего найти, опираясь на формулу (7.7). Так как силы, действующие в электростатическом поле, удовлетворяют условию для потенциальных сил (см. [1], ч. I, § 11, п. 11.6):

$$\operatorname{rot}(q\vec{E}) = 0,$$

то для нахождения $\vec{F}$ можно воспользоваться формулой (см. [1], ч. I, (11.4))

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U,$$

откуда в нашем случае

$$\vec{F} = \operatorname{grad}(\vec{p}\,\vec{E}).$$

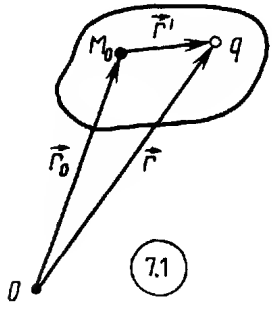
При вычислении применим тождество (П. II, 29) и учтем, что $\vec{p}$ от $\vec{r}$ не зависит, а $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. И окончательно

$$\vec{F} = (\vec{p}\,\nabla)\vec{E}(\vec{r}). \tag{7.8}$$

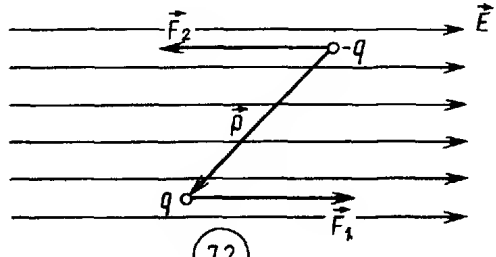
Важная особенность формулы (7.8) состоит в том, что $\vec{F} \neq 0$ только при условии, что электростатическое поле изменяется от точки к точке пространства, т. е. оно неоднородно.

Из курса механики известно, что произвольная система сил, действующих на твердое тело, сводится к главному вектору $\vec{F}$ и к главному моменту $\vec{M}$ (см. [1], § 17, п. 17.1). В механическом плане M — обобщенная потенциальная сила (см. [1], ч. I, § 19, пп. 19.4 и 19.5). Выбирая в качестве обобщенной координаты угол ϑ между векторами $\vec{E}$ и $\vec{p}$, имеем

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(pE\cos\vartheta) = -pE\sin\vartheta.$$



7.1



7.2

Чтобы установить направление вектора $\vec{M}$, рассмотрим однородное поле $\vec{E}$ и простейший диполь, состоящий из двух разноименных, равных по модулю зарядов, помещенный в поле (рис. 7.2). Из анализа взаимного направления векторов $\vec{F}_1$, $\vec{E}$ и $\vec{p}$ следует

$$\vec{M} = [\vec{p}\,\vec{E}]. \tag{7.9}$$

(Отсюда же видно, что предыдущее выражение есть проекция момента силы на ось, перпендикулярную диполю, или момент силы относительно этой оси.) Для электронейтральной системы момент не зависит от выбора моментной точки.

В однородном поле на систему с дипольным моментом $\vec{p}$ действует только момент силы $\vec{M}$, стремящийся установить вектор $\vec{p}$ в направлении поля. В неоднородном поле к моменту добавляется равнодействующая $\vec{F}$, зависящая как от ориентации вектора $\vec{p}$, так и от разности значений напряженности в точках расположения зарядов системы.

Пример 7.1. **Вычисление энергии, момента и силы для диполя.**

Электрический диполь с моментом $\vec{p}$ находится в поле точечного заряда q на расстоянии r от него. Найдем энергию диполя в этом поле, момент сил и силу, действующую на диполь.

Напряженность поля точечного заряда выражается формулой (6.10). Используя выражения (7.7) и (7.9), имеем

$$U = -kq\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} = -\frac{kqp\cos\vartheta}{r^2},$$

$$\vec{M} = \frac{kq}{r^3}[\vec{p}\,\vec{r}],\quad M_\vartheta = -\frac{kqp}{r^2}\sin\vartheta.$$

Для нахождения силы применим формулу $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Получим

$$\vec{F} = kq\operatorname{grad}\left(\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}\right) = kq\frac{\vec{p}}{r^3} - 3kqp\frac{\cos\vartheta}{r^4}\vec{r}.$$

7.3. Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля. Выше, в § 6, п. 6.3, говорилось, что в рамках статических проявлений поля такая его принципиальная особенность, как конечное значение скорости передачи взаимодействий, остается нераскрытой, ибо не проявляется именно из-за стационарности взаимодействия поля и зарядов.

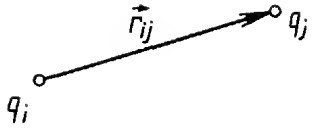
Так же в духе механического дальнодействия можно подойти и к вопросу об энергии взаимодействия между собой электрических зарядов в системе — это будет потенциальная энергия системы. Используя формулу (7.3) и принцип суперпозиции полей, созданных отдельными зарядами системы, имеем

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \tag{7.10}$$

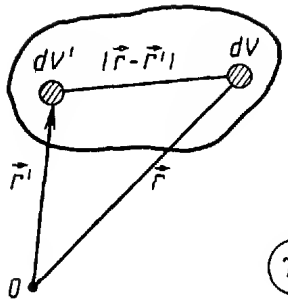
где

$$\varphi_i = k\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} -$$

потенциал, созданный остальными зарядами в точке расположения



7.3



7.4

i-го заряда (рис. 7.3). Подставляя значение φ_i в (7.10), получим также

$$W_{эл} = \frac{k}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{7.11}$$

Такова энергия взаимодействия системы зарядов. Она складывается из энергии взаимодействия отдельных пар:

$$w_{ij} = k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{7.12}$$

Что касается происхождения коэффициента $\frac{1}{2}$ в формулах (7.10) и (7.11), то он ставится потому, что при суммировании по i и j пары перечисляются дважды.

Для энергии системы зарядов, непрерывно распределенных в пространстве, получим соответствующие формулы.

Величину

$$\frac{k \varrho(\vec{r})\, dV\, \varrho(\vec{r}')\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

можно рассматривать как энергию взаимодействия точечных зарядов $dQ = \varrho(\vec{r})\, dV$ и $dQ' = \varrho(\vec{r}')\, dV'$, расположенных в точках $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ (рис. 7.4). Поэтому для непрерывно распределенного по объему V заряда имеем

$$W_{эл} = \frac{k}{2} \iint_{VV'} \frac{\varrho(\vec{r})\, \varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'. \tag{7.13}$$

Аналогично вместо формулы (7.10) получим

$$W_{эл} = \frac{1}{2} \int_V \varrho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, dV, \tag{7.14}$$

где

$$\varphi(\vec{r}) = k \int_{V'} \frac{\varrho(\vec{r}')\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

— потенциал, создаваемый в точке $\vec{r}$ элементами непрерывно распределенного заряда.

Между формулами (7.11) и (7.13) имеется существенная разница. В формуле (7.11) энергия взаимодействия частей дискретного точечного заряда q_i между собой не учитывается, так как пространственно точечный заряд неделим. В формулу же (7.13) входит энергия взаимодействия бесконечно малых частей $\varrho\, dV$ непрерывного заряда Q в объеме V

Подход к энергии системы зарядов может быть осуществлен и с иных позиций: вместо потенциальной энергии взаимодействия системы зарядов (7.11) и (7.13) можно рассмотреть энергию созданного ими поля. Используя формулу (3.8), имеем

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\int_{\infty} \varepsilon_0 E^2 dV. \tag{7.15}$$

(В формуле (7.15) интегрировать нужно по всему пространству, чтобы учесть все поле, созданное системой зарядов.)

Докажем важное утверждение: *потенциальная энергия системы зарядов сводится к энергии поля, созданного этой системой.* В формуле (7.14) с помощью уравнений Максвелла произведем замену $\varrho = \varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E}$:

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \varphi\, \mathrm{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \mathrm{div}\,(\varphi\vec{E}) -$$

$$- \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \vec{E}\, \mathrm{grad}\,\varphi dV = \frac{1}{2}\oint_S \varepsilon_0 \varphi \vec{E}\, \overrightarrow{dS} + \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dV.$$

Для ограниченной по размерам системы зарядов при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$ как $\frac{1}{r}$, а $E \to 0$ как $\frac{1}{r^2}$, тогда как сдвигаемая в бесконечность поверхность S, ограничивающая объем V, растет пропорционально r^2. Поэтому в правой части первое слагаемое обращается в нуль и

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dV.$$

Таким образом, утверждение доказано и можно заключить, что потенциальная энергия системы является по своей природе энергией электростатического поля.

Применим формулу (7.11) к системе, состоящей из двух зарядов:

$$W_{эл} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}.$$

Отсюда видно, что потенциальная энергия нормирована на нуль при бесконечном удалении зарядов друг от друга. Это наибольшее значение энергии, если заряды разноименны и притягиваются. Соответственно при одноименных зарядах это будет наименьшим значением энергии, а энергия взаимодействия тем больше, чем ближе сдвинуты заряды.

Если заряды неограниченно сближаются ($r_{1,2} \to 0$), то $W_{эл} \to \infty$. То же относится и к энергии поля системы точечных зарядов: ее

абсолютное значение оказывается бесконечным, так как напряженность поля при неограниченном приближении к любому точечному заряду стремится к бесконечности. Но формула (7.14) всегда дает конечные значения энергии. Это значит, что расходимости возникают вследствие использования точечной модели электрического заряда. Бесконечные значения энергии физически никак не интерпретируются. Они не мешают пользоваться формулами для энергии до тех пор, пока не требуются полные ее значения. Дело в том, что измеряется и имеет физические проявления в известных нам процессах только разность энергий системы для двух каких-либо ее состояний. Изменения же энергии при переходе между состояниями всегда оказываются конечными.

Если же в расчет входит полная энергия системы зарядов, то следует воспользоваться моделью непрерывно распределенных по пространству зарядов. Однако понятие непрерывно распределенных по пространству зарядов применимо лишь в макроскопической физике. В тех же рамках служат и формулы (7.13), (7.14), (7.15).

В этой связи напомним, что в истории науки известны попытки распространить теорию Максвелла на микрочастицы. Так, обсуждались модели электрона в виде жесткого шарика определенного радиуса с равномерно распределенным зарядом (М. Абрагам, 1902 г.). Если рассчитать энергию поля, созданного таким электроном, то она окажется равной (см. пример 7.2):

$$W = \frac{3ke^2}{5r_0}.$$

Вся масса электрона считалась имеющей электромагнитное происхождение, т. е. она связана с энергией поля электрона соотношением Эйнштейна

$$\frac{3ke^2}{5r_0} = mc^2$$

Отсюда следует значение для так называемого классического радиуса электрона:

$$r_0 = \frac{3ke^2}{5mc^2} \approx \frac{ke^2}{mc^2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Такая модель электрона может быть названа классической. Она оказывается несостоятельной по ряду причин. В частности, совершенно не понятно, какие силы удерживают заряженные «части» электрона, преодолевая огромные силы их электростатического отталкивания друг от друга. По современным представлениям электрон – точечный объект. Классический же радиус r_0 сейчас играет роль предела применимости классической электродинамики к взаимодействию на малых расстояниях. (На самом деле применимость классической электродинамики ограничена большими, чем классический радиус, расстояниями вследствие квантовых эффектов.)

В методологическом плане полезно представить энергию поля системы зарядов как сумму собственной энергии (поля) зарядов и энергии их взаимодействия. Такой прием позволяет до некоторой степени уточнить понятие потенциальной энергии как определенной части энергии поля системы. В данном контексте собственной энергией называют энергию поля, созданного отдельным зарядом. Рассмотрим простейшую систему двух зарядов, создавших поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Соответственно их собственные энергии выражаются формулами

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_1^2 dV, \qquad W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_2^2 dV.$$

Поле, созданное обоими зарядами при совместном их действии, имеет напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

откуда

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2,$$

и для энергии поля имеем выражение

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_1^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_2^2 dV + \varepsilon_0\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV.$$

Слагаемое

$$W_{1,2} = \varepsilon_0\int \vec{E}_1\vec{E}_2 dV$$

называют энергией взаимодействия.

Вся энергия поля системы двух зарядов

$$W = W_1 + W_2 + W_{1,2}$$

всегда положительна, а вот энергия взаимодействия может быть и отрицательна. Энергия системы разноименных зарядов тем меньше, чем меньше расстояние между ними, именно за счет отрицательной энергии взаимодействия; энергия системы одноименных зарядов тем больше, чем меньше расстояние, за счет положительной энергии взаимодействия.

Пример 7.2. **Вычисление энергии поля равномерно заряженного шара.**

Пусть плотность объемных зарядов ϱ, а радиус шара a. Пользуясь формулами для напряженности поля такого шара (пример 6.1)

$$E = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}, \quad r \leqq a; \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \quad r > a$$

и применяя формулу для энергии поля (7.15), получаем

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}4\pi\int_0^a \left(\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}4\pi\int_a^\infty \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 dr = \frac{3kQ^2}{5a}.$$

Пример 7.3. **Выяснение смысла коэффициента** $\frac{1}{2}$.

Сравним энергию системы двух точечных зарядов, вычисленную по формулам (7.10) и (7.11). С помощью формулы (7.10) получаем

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{1,2}} + \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}}\right) = \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}},$$

что совпадает со значением, найденным по формуле (7.11).

Пример 7.4. **Вычисление работы, совершаемой полем точечного заряда q_1, по удалению другого точечного заряда q_2 из некоторой точки в бесконечность.**

Выбирая начало координат в точке расположения первого заряда, имеем для напряженности его поля значение

$$\vec{E} = k\frac{q_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Определяя силу, действующую на второй заряд со стороны поля, находим работу:

$$A = \int_r^\infty k\frac{q_1q_2}{r^2}dr = k\frac{q_1q_2}{r}.$$

Это выражение совпадает с формулой энергии системы двух точечных зарядов (7.12).

Сравнивая также с формулой энергии (7.10), находим, что потенциал поля заряда q_1 выражается известным нам соотношением

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{r}.$$

Однако теперь ясна целесообразность его нормировки: энергия точечного заряда $q_2\varphi$ равна работе по удалению заряда в бесконечность только при условии $\varphi = 0$, $r \to \infty$.

§ 8. Магнитостатическое поле в вакууме

8.1. Уравнения магнитостатического поля в потенциалах. Магнитостатическое поле возникает в случае движения зарядов в пространстве с постоянной во времени плотностью токов. Его исходными уравнениями являются уравнения (6.5). Для векторного потенциала магнитного поля может быть использовано эквивалентное уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \tag{8.1}$$

причем

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{8.2}$$

Решение его (6.2) найдено ранее:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}\,dV_0. \tag{8.3}$$

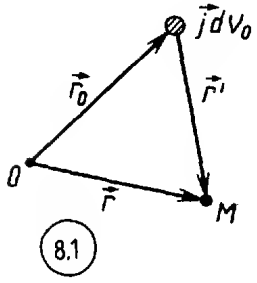
(Обозначения в формуле (8.3) соответствуют рис. 8.1.)

Что касается общего решения, складывающегося из выражения (8.3) и общего решения уравнения Лапласа $\Delta \vec{A} = 0$, то оно мало употребительно для системы зарядов в вакууме, где обычно имеют дело с полем, созданным токами рассматриваемой системы, $\vec{j}(\vec{r}_0)$, а внешнее стационарное поле отсутствует.

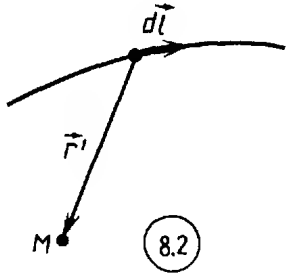
Наконец, в отдельных случаях при симметричном распределении токов в пространстве применяется интегральная форма первого уравнения (6.5)

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I, \tag{8.4}$$

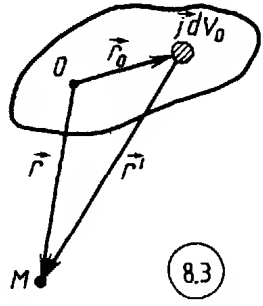
где I – ток, пронизывающий контур L, по которому вычислена циркуляция вектора $\vec{B}$.



8.1



8.2



8.3

8.2. Векторный потенциал и индукция магнитостатического поля. Рассчитаем индукцию вихревого магнитостатического поля, пользуясь его потенциалом (8.3). Введем также обозначение, значительно сокращающее записи:

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\ \text{с}^2}, \tag{8.5}$$

и назовем f *индукционной постоянной.* (Необходимо заметить, что использование константы f, как, впрочем, и введенной нами ранее константы k, системой единиц СИ не предусмотрено. Мы вводим названные константы для упрощения формул, весьма громоздких из-за входящих в них коэффициентов в системе СИ. Для того чтобы придать любой формуле стандартный для СИ вид, достаточно подставить в нее значения констант.) Из равенства $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ следует также соотношение

$$k = c^2 f.$$

Воспользовавшись формулой (8.2), рассчитаем индукцию магнитостатического поля по выражению для векторного потенциала:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}_r \vec{A} = f \int \operatorname{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)\,dV_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} =$$

$$= f \int \left[\operatorname{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\,\vec{j}(\vec{r}_0)\right] dV_0 =$$

$$= f \int \frac{-[(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\vec{j}(\vec{r}_0)]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\,dV_0.$$

(Обозначения соответствуют рис. 8.1. Индекс r у знака ротора и градиента указывает, что нужно дифференцировать по координатам точки M.) Окончательно

$$\vec{B} = f \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}_0)\,\vec{r}']}{(r')^3}\,dV_0. \tag{8.6}$$

Эта формула индукции магнитостатического поля имеет физический смысл для произвольного, но ограниченного по размерам распределения токов в пространстве. (Она в определенной мере аналогична формуле напряженности электростатического поля (6.13), но вместо плотности заряда в ней стоят плотность тока и векторное произведение $[\vec{j}\,\vec{r}']$.)

Пример 8.1. **Магнитное поле постоянного линейного тока.**

На практике характерно использование токов в проводниках, поперечное сечение которых мало по сравнению с длиной. В примере 1.7 было показано, что элемент линейного тока выражается формулой

$$\vec{j}dV = Id\vec{l}.$$

Согласно формуле (8 6) индукция магнитного поля линейных токов определяется соотношением

$$\vec{B} = fI \int_L \frac{[\vec{dl}\,\vec{r}']}{(r')^3}.$$

Это же соотношение представим в дифференциальной форме

$$d\vec{B} = fI \frac{[\vec{dl}\,\vec{r}']}{(r')^3}, \qquad (8.6\text{-а})$$

где I – сила тока, r' – расстояние от элемента тока до точки наблюдения (рис. 8.2) Получили известное из общего курса физики выражение закона Био-Савара для магнитного поля тока.

8.3. Магнитное поле в дипольном приближении. Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение в некоторой конечной области пространства. Из уравнения непрерывности (1.6) и условий стационарности движения зарядов $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ следует равенство

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0. \qquad (8.7)$$

Это означает, что поле вектора плотности тока $\vec{j}$ соленоидально, линии тока замкнуты.

Разобьем весь объем системы на замкнутые трубки тока малого сечения, стенки таких трубок образованы линиями тока. Для тонкой трубки справедливо соотношение

$$\vec{j}_i dV_i = I_i \vec{dl}_i,$$

где I_i – постоянная по всей длине трубки сила тока. При расчетах любой интеграл по объему системы разбивается на сумму интегралов по трубкам тока. Как следствие получаем

$$\int_V \vec{j} dV = \sum_i \int \vec{j}_i dV_i = \sum_i I_i \oint_L \vec{dl}_i = 0, \qquad (8.8)$$

так как для замкнутых кривых $\oint_L \vec{dl} = 0$. Формула (8.8) также является условием стационарности движения зарядов в системе, она будет использована нами ниже в решении задачи о магнитном поле системы токов на больших расстояниях от нее.

Допустим, что размеры системы много меньше расстояния от нее до точки наблюдения (рис. 8.3). При $r \gg r_0$ разложим $\frac{1}{r'}$ в ряд по степеням малой величины r_0. Ограничимся первыми двумя членами разложения. Такая выкладка уже была сделана в § 6, п. 6.4. Здесь приведем готовый результат:

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r} - \vec{r}_0 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_0 \vec{r}}{r^3}.$$

Подставив это выражение в формулу (6.2), получаем

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{f}{r}\int_{V_0}\vec{j}(\vec{r}_0)dV_0 + \frac{f}{r^3}\int_{V_0}\vec{j}(\vec{r}_0)(\vec{r}_0\vec{r})dV_0.$$

Согласно формуле (8.8) первое слагаемое равно нулю и

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f}{r^3}\int_{V_0}\vec{j}(\vec{r}_0)(\vec{r}_0\vec{r})dV_0. \tag{8.9}$$

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью тождества:

$$\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) = \frac{1}{2}\{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) - \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\} + \frac{1}{2}\{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\}.$$

Первая фигурная скобка есть не что иное, как $[[\vec{r}_0\vec{j}]\vec{r}]$, а интеграл от второй скобки обращается в нуль (см. ниже, петит). Выражение для потенциала приобретает вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f}{r^3}\int_{V_0}\frac{[[\vec{r}_0\vec{j}]\vec{r}]}{2}dV_0 = \frac{f}{r^3}\left[\int_{V_0}\frac{[\vec{r}_0\vec{j}]}{2}dV_0\vec{r}\right] \tag{8.10}$$

Покажем, что интеграл во второй фигурной скобке по объему системы равен нулю. Для этого используем тот же прием, что и для доказательства формулы (8.8). У нас

$$\int\{\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\}dV_0 = \sum_i I_i\oint_{L_i}\{\vec{dl}_i(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{dl}_i\vec{r})\} =$$

$$= \sum_i I_i\oint_{L_i}\{d\vec{r}_0(\vec{r}_0\vec{r}) + \vec{r}_0(d\vec{r}_0\vec{r})\} = \sum_i I_i\oint_{L_i} d\{\vec{r}_0(\vec{r}_0\vec{r})\} = 0.$$

Целесообразно ввести обозначение:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{V_0}[\vec{r}_0\vec{j}]dV_0. \tag{8.11}$$

Эту величину называют дипольным магнитным моментом системы. Через дипольный момент формула потенциала приобретает вид

$$\vec{A} = f\frac{[\vec{m}\vec{r}]}{r^3} = f\frac{[\vec{m}\vec{n}]}{r^2}, \tag{8.12}$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Нетрудно в этом приближении найти и индукцию магнитостатического поля:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = f\left\{\vec{m}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} - (\vec{m}\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}\right\}$$

После выкладки получаем

$$\vec{B} = f\frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{r^3}. \tag{8.13}$$

Заметим, что формула (8.13) аналогична формуле (6.19) для напряженности электростатического поля при электронейтральной системе зарядов в дипольном приближении. Имеются, однако, принципиальные отличия магнитостатического и электростатического полей. Во-первых, «нулевого» приближения для магнитного поля

нет, так как нет магнитных зарядов: систему токов можно лишь условно уподобить некоторой нейтральной системе фиктивных «магнитных» зарядов. Во-вторых, аналогия ограничивается только дипольным приближением.

Пример 8.2. **Магнитный момент кольцевого линейного тока.**

С помощью формулы (8.11) запишем

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_L [\vec{r}_0 d\vec{l}].$$

Так как $\frac{1}{2}[\vec{r}_0 d\vec{l}] = d\vec{S}$, а контур плоский (рис. 8.4), то

$$\vec{m} = I\vec{S}.$$

Пример 8.3. **Магнитный момент точечного заряда *e*, движущегося по окружности радиусом *r* со скоростью *v*.**

Формулу из примера 8.2 можно применить к средней силе тока, образованного *движением* заряда

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r},$$

и

$$m_e = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

Таково с точки зрения классической электродинамики значение орбитального магнитного момента электрона. Заметим, что момент импульса электрона равен mvr. Отношение магнитного момента к механическому равно постоянной $\frac{e}{2m}$. Эту величину называют гиромагнитным отношением для электрона.

8.4. Энергия системы движущихся зарядов во внешнем магнитном поле. Сила, действующая на систему. Ранее было показано, что магнитная составляющая силы Лоренца при перемещении точечного электрического заряда работы не совершает (см. § 3, п. 3.1). Это, однако, не означает, что система зарядов, находящаяся во внешнем магнитном поле, не может обладать энергией. Силы, действующие на токи как на системы движущихся зарядов, подчиненных определенным связям, могут совершать работу.

Для получения формулы энергии системы во внешнем магнитном поле (в дипольном приближении) будем исходить из двух допущений:

1. Система характеризуется магнитным моментом, который не изменяется во внешнем поле (т. е. система токов обладает некоторой «жесткостью», обусловленной, как и в электростатическом поле, связями, обеспечивающими заданную конфигурацию токов).

2. Поскольку магнитное поле в дипольном приближении вполне аналогично электростатическому (ср. формулы (8.13) и (6.19)), то формально можно считать систему токов в ограниченной области пространства в дипольном приближении эквивалентной некоторой системе магнитных зарядов, распределенных с плотностью ϱ_m, причем в целом система нейтральна, и $\int_{V_0} \varrho_m dV_0 = 0$.

В таком случае магнитный момент системы определяется через фиктивные магнитные заряды с помощью выражений, аналогичных соотношениям (6.15) и (6.16). Магнитное поле создается этими зарядами в соответствии с формулами электростатики, а энергия системы в поле определяется формулой

$$U = -\vec{m}\vec{B}. \tag{8.14}$$

Понятно, что сила и момент силы, действующие на систему токов как целое, определяются соотношениями, аналогичными (7.8) и (7.9):

$$\vec{F} = (\vec{m}\nabla)\,\vec{B}; \tag{8.15}$$

$$\vec{M} = [\vec{m}\vec{B}]. \tag{8.16}$$

После того как формулы (8.15) и (8.16) получены, надобность в фиктивных магнитных зарядах отпадает, а величины $\vec{B}$ и $\vec{m}$ рассчитываются без учета магнитных зарядов по формулам (8.6) и (8.11) для того или иного распределения токов $\vec{j}(\vec{r}_0)$.

8.5. Энергия магнитостатического поля. Положим $\vec{E} = 0$ в формуле электромагнитного поля (3.8). Тогда

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV.$$

Энергию постоянного магнитного поля можно свести к энергии взаимодействия токов. С этой целью совершим ряд преобразований.

Заменяя B^2 на равную величину $\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$ и применяя тождество

$$\mathrm{div}\,[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B},$$

имеем

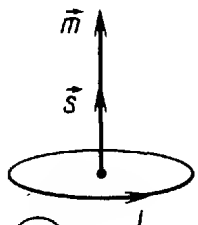
$$B^2 = \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} + \mathrm{div}\,[\vec{A}\vec{B}].$$

Учтем также, что

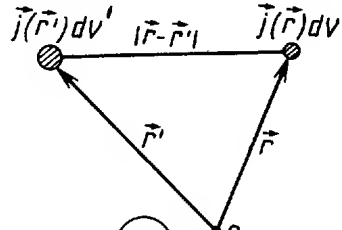
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Подставим найденное выражение для B^2 в интеграл энергии. Применяя теорему Гаусса (П. II, 34), получим

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2}\int \vec{A}\vec{j}\,dV + \frac{1}{2\mu_0}\oint_S [\vec{A}\vec{B}]\,d\vec{S}.$$



8.4



8.5

При вычислении поверхностного интеграла следует перейти к пределу, когда поверхность S сдвигается в бесконечность. Так как поле на бесконечности равно нулю, то это слагаемое исчезает. В первом интеграле можно ограничить область интегрирования частью пространства, где $\vec{j} \neq 0$. Итак

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \int \vec{A}\vec{j} dV. \tag{8.17}$$

Формула (8.17) по смыслу аналогична формуле (7.14) для электростатического поля. Она может быть переписана с помощью выражения для потенциала (6.2) в виде

$$W_{\text{маг}} = \frac{f}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'. \tag{8.18}$$

Снова замечаем сходство с электростатикой (см. формулу (7.13)), только здесь вместо элементарных зарядов ϱdV взаимодействуют элементы тока $\vec{j}dV$. (Обозначения соответствуют рис. 8.5.)

Таким образом, энергия магнитного поля свелась к энергии взаимодействия токов между собой; усматривается аналогия с энергией взаимодействия электрических зарядов на расстоянии. (Однако следует помнить, что магнитное поле непотенциально.)

Полезно сопоставить формулу для энергии взаимодействия электрических зарядов (7.13) с формулой (8.18), придав последней вид

$$W_{\text{маг}} = \frac{f}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\varrho(\vec{r})\,\vec{v}\,\varrho(\vec{r})\,v'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'.$$

Так как k больше f в $9 \cdot 10^{16}$ раз, то при малых скоростях движения зарядов энергия магнитного поля системы исчезающе мала по сравнению с электрической. Соответственно подавляющее значение в системе имеют электрические силы и электрические взаимодействия. Магнитные взаимодействия для системы медленно движущихся зарядов можно отнести к релятивистским эффектам; они растут с ростом скорости. Если v и v' близки к c, то множитель vv' в подынтегральном выражении как раз компенсирует малость f.

Сказанное о релятивистском характере магнитных сил, однако, не означает, что магнитные силы всегда малы при малых скоростях движения зарядов: в стационарном случае для электронейтральных систем электрическое поле может быть исчезающе малым, а магнитное — значительным, так как электронейтральность не означает отсутствие тока. Ток может быть образован движением большого количества зарядов одного знака. В металлах, например, электронейтральность системы сохраняется в физически малых элементах объема, хотя ток обусловлен движением одних электронов: при ста-

ционарном процессе положительный заряд ионов внутри проводника равен отрицательному заряду электронов.

Для электромагнитных волн — предельно релятивистского объекта, имеющего скорость передачи энергии в вакууме, равную c, как это будет показано ниже, вклады в энергию электрической и магнитной составляющих одинаковы.

В заключение раздела о стационарном электромагнитном поле рассмотрим вопрос о потокс энергии. Если имеет место одно электрическое или одно магнитное поле, то нет ни потока энергии, ни распределенного в пространстве импульса. (Из формул (3.7) и (3.17) следует, что эти величины равны нулю.) Но ссли в некоторой области пространства существуют одновременно стационарное магнитное и стационарное электрическое поля, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ неколлинеарны друг другу, то имеется перенос энергии с плотностью потока

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\vec{B}].$$

Кроме того, такое поле обладает и импульсом, распределенным с плотностью

$$\vec{g} = \varepsilon_0[\vec{E}\vec{B}].$$

Стационарный поток энергии не приводит к изменению векторов напряженности и индукции в различных точках пространства; сохраняется в каждой точке плотность энергии и плотность импульса. Кроме того, если ввести величину $\tilde{w} = \frac{\sigma}{c}$ (плотность энергии в потоке, движущемся со скоростью c), то выполняется релятивистское соотношение $\tilde{w} = cg$.

Чтобы понять наличие потока энергии и импульса у стационарного поля, обратимся к аналогии. В стационарном потоке несжимаемой жидкости распределен импульс с плотностью $\mu\vec{v}$ (μ — плотность массы; $\vec{v}$ — скорость потока) и имеется движение энергии. Ниже мы увидим, что передача энергии по проводам в случае постоянного тока осуществляется именно за счет потока энергии в стационарном электромагнитном поле, существующем в непосредственной близости от провода.

Методические указания и рекомендации

I. Бóльшая часть материала главы с формальной точки зрения является частным случаем изученного ранее. Здесь изложены не электростатика и магнитостатика — самостоятельные разделы о постоянных полях в веществе, а лишь некоторые вопросы стационарных полей в вакууме. Принципиальное значение имеют дипольное приближение, анализ соотношения точек зрения близкодействия и дальнодействия в вопросе об энергии поля; соответствующий материал относится к лекциям. Ряд других вопросов может быт изучен студентами самостоятельно при надлежащей организации работы.

II. В процессе чтения главы контролируйте усвоение с помощью ответов на предлагаемые ниже вопросы.

§ 6. Покажите, что функция (6.1) является частным решением уравнения поля (6.7). Обдумайте соотношение между общим и частным решениями уравнения, физический смысл слагаемых в общем решении. Сопоставьте различные подходы к стационарному полю, используемые при расчетах. Найдите математический переход от закона Кулона к уравнению (6.4), опираясь на теорему Гаусса. Предложите пример системы точечных зарядов, для которой $Q = 0$, $\vec{p} \neq 0$; $Q = 0$, $\vec{p} = 0$, но не равен нулю квадрупольный момент. Решите задачи 1–6 из упражнений к главе.

§ 7. Вспомните определения работы, энергии, момента силы из механики (см. [1]). Обдумайте соотношение между формулами энергии взаимодействия зарядов и энергии поля, соответственно – интерпретацию энергии с точки зрения дально- и близкодействия. Рассмотрите примеры к параграфу, самостоятельно выполняя расчеты.

§ 8. Рассмотритс различные способы расчета магнитных полей. Разберитесь в истоках и пределах аналогии между электростатическим и магнитостатическим полями. Проделайте выкладки примеров, решите задачи 7, 8. Покажите общие особенности стационарных полей.

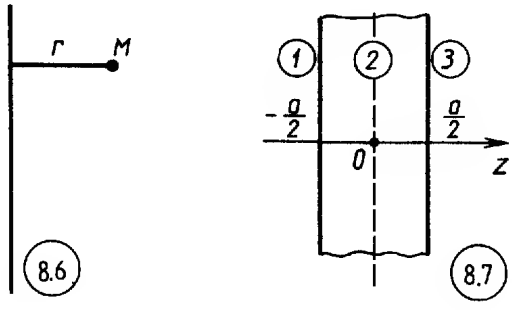
Упражнения

1. С помощью теоремы Гаусса найти поля равномерно заряженной нити, плоскости, цилиндрической и сферической поверхностей (рис. 8.6.).

$$1)\ E = \frac{2k\tau}{r}. \quad 2)\ \vec{E} = 2\pi k\sigma\vec{n}. \quad 3)\ E = \frac{4\pi k a\,\sigma}{r},$$
$$r \geqq a;\ E = 0,\ r < a. \quad 4)\ E = \frac{4\pi k a^2\sigma}{r^2},\ r \geq a;\ E = 0,\ r < a.$$

2. С помощью уравнения в потенциалах найти поле бесконечно протяженной пластины толщиной a, заряженной с постоянной плотностью ϱ.

Ответ: Выбирая ось z перпендикулярно пластине, имеем соответственно для 1, 2 и 3 областей (рис. 8.7)



8.6 8.7

$$\varphi_1 = 2\pi k\varrho a z + \frac{1}{2}\pi k\varrho a^2, \quad \left(z \leq -\frac{a}{2}\right);$$

$$\varphi_2 = -2\pi k\varrho z^2, \quad \left(-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}\right);$$

$$\varphi_3 = -2\pi k\varrho a z + \frac{1}{2}\pi k\varrho a^2, \quad \left(z \geq \frac{a}{2}\right);$$

$$E_{1,z} = -2\pi k\varrho a, \; E_{2,z} = 4\pi k\varrho z, \; E_{3,z} = 2\pi k\varrho a.$$

3. Найти поле бесконечного круглого цилиндра радиусом a, равномерно заряженного с плотностью ϱ, решая уравнение в потенциалах.

Ответ: $\varphi_1 = -\pi k\varrho r^2$, $E_{1,r} = 2\pi k\varrho r$, $(0 < r < a)$;

$$\varphi_2 = 2\pi k\varrho a^2 \ln\frac{a}{r} - \pi k\varrho a^2, \; E_{2,r} = \frac{2\pi k\varrho a^2}{r}, \; (r \geqq a).$$

4. Найти поле прямолинейного отрезка нити длиной l, заряженного с постоянной линейной плотностью τ.

Вследствие симметрии в расположении зарядов от нуля отличны лишь составляющие $\vec{E}_x$ и $\vec{E}_z$ вектора напряженности поля (рис. 8.8). Элемент длины dz_0 создает поле с напряженностью

$$d\vec{E} = \frac{k\tau dz_0 \vec{r}'}{r'^3}.$$

Интегрируя по длине отрезка, получаем

$$E_x = \int_{-(l-a)}^{a} \frac{k\tau dz_0}{z_0^2 + x^2}\cos\alpha, \quad E_z = \int_{-(l-a)}^{a} \frac{k\tau dz_0}{z_0^2 + x^2}\sin\alpha.$$

Произведем замену переменных (см. рис. 8.8):

$$z_0 = x\operatorname{tg}\alpha, \; dz_0 = \frac{x d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

после чего вычисление интегралов не представляет труда:

$$E_x = \frac{k\tau}{x}(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1), \; E_z = \frac{k\tau}{x}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

5. Вычислить дипольные и квадрупольные моменты систем точечных электрических зарядов, изображенных на рисунке 8.9.

Ответ: а) $p_x = aq$, $p_y = p_z = 0$, $D_{xx} = qa^2 - qa^2 = 0$;

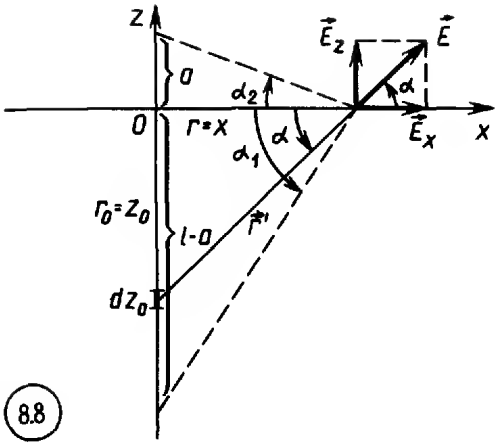
остальные компоненты квадрупольного момента также равны нулю.

б) $\vec{p} = 0$, $D_{xx} = -2qa^2$, $D_{yy} = 2qa^2$,

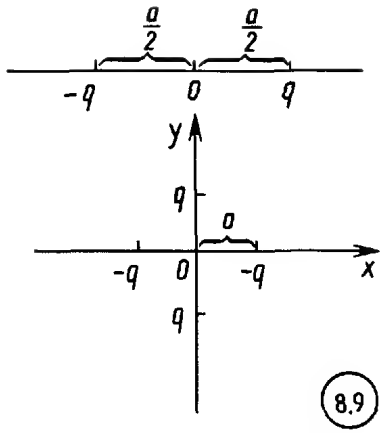
$$D_{zz} = 0, \; D_{xy} = D_{yx} = 0, \; D_{xz} = D_{zx} = 0, \; D_{yz} = D_{zy} = 0.$$

6. Вычислить дипольный и квадрупольный моменты круглого цилиндра радиусом a и высотой $2h$, равномерно заряженного по объему с плотностью ϱ (рис. 8.10).

Ответ: Дипольный момент равен нулю в силу симметрии располо-



8.8



8.9

жения зарядов. Для вычисления квадрупольного момента удобно использовать цилиндрические координаты r, φ, z:

$$D_{xx}=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h}\varrho r^3\cos^2\varphi dr d\varphi dz=\frac{\pi a^4 h\varrho}{2};$$

$$D_{yy}=D_{xx};\ D_{zz}=\frac{2}{3}\pi a^2h^3\varrho;$$

остальные компоненты равны нулю.

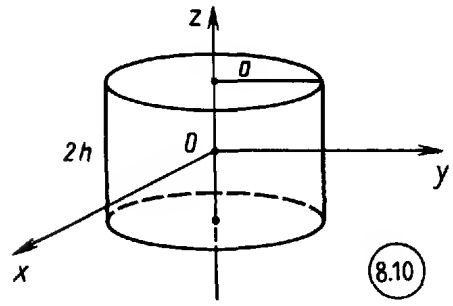
7. Найти индукцию поля бесконечного соленоида с плотностью поверхностного тока $i\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)$ (рис. 8.11).

Ответ: Из симметрии распределения тока по условиям задачи следует, что вектор индукции $\vec{B}$ параллелен оси Oz, а его модуль не зависит от координаты z и угла поворота вокруг оси Oz. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по любому контуру типа (а) равна нулю; следовательно, индукция поля вне соленоида равна нулю в силу формулы (8.4). Вычисление циркуляции по контуру (б) дает

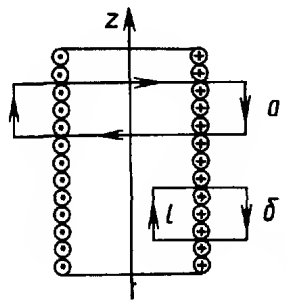
$$lB=\mu_0 il,$$

откуда

$$B=\mu_0 i$$



8.10



8.11

во всех точках соленоида. Для соленоида с числом витков n на единицу длины и силой тока I получаем

$$B = \mu_0 n I.$$

8. Найти векторный потенциал и индукцию поля, созданного током, равномерно распределенным по поперечному сечению бесконечно длинного полого цилиндра, наружный и внутренний диаметры которого соответственно равны $2a$ и $2b$.

Указания. Используем уравнение

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

В декартовой системе направим ось Oz по оси цилиндра, так что $j_x = j_y = 0$, $j_z = j$, откуда $A_x = A_y = 0$, $A_z = A$ и

$$\Delta A = -\mu_0 j.$$

Введем цилиндрические координаты r, α, z. Из симметрии в условиях задачи $A = A(r)$; следовательно,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = 0, \quad r \leq a, \quad r \geq b;$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = -\mu_0 j, \quad a \leq r \geq b.$$

Прямое интегрирование уравнений приводит к выражению для потенциала

$$A_1 = C_1 \ln r + C_2, \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$A_2 = -\frac{\mu_0 j}{4} r^2 + C_3 \ln r + C_4, \quad a \leq r \leq b;$$

$$A_3 = C_5 \ln r + C_6, \quad \infty > r \geq b. \tag{1}$$

Так как $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, то в данной задаче

$$\vec{B} = -\vec{e}_\varphi \frac{dA}{dr}. \tag{2}$$

(См. выражение для ротора в цилиндрических координатах, П. II, 18.) С помощью формулы (1) получим соответственно для трех областей

$$\frac{dA_1}{dr} = \frac{C_1}{r}, \quad \frac{dA_2}{dr} = -\frac{\mu_0 j}{2} r + \frac{C_3}{r}, \quad \frac{dA_3}{dr} = \frac{C_5}{r}.$$

Требуя конечных значений индукции B, полагаем $C_1 = 0$. Без ограничения общности можно принять и $C_2 = 0$. Остальные постоянные находятся из условий непрерывности потенциала и индукции на границах областей.

Ответ:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0;$$

$$A_2 = -\mu_0 j \left(\frac{1}{4} r^2 - \frac{a^2}{2} \ln r + \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4}\right);$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$A_3 = -\frac{\mu_0 j}{2}\left\{(b^2-a^2)\ln r + \frac{1}{2}(b^2-a^2) + a^2\ln a - b^2\ln b\right\},$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\,\frac{b^2-a^2}{r}.$$

(При $a = 0$ получается поле тока, текущего по сплошному цилиндру:

$$B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r,\ 0 \le r \le b;$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},\ b \le r \le \infty;$$

$$I = j\pi b^2.)$$

Глава III

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В данной главе исследуется свободное электромагнитное поле существующее и распространяющееся в пространстве в виде электромагнитных волн. Как показано в § 5, произвольное волновое поле может быть представлено суперпозицией плоских волн вида $f\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right)$. Ниже волны рассматриваются подробнее; кроме того, обсуждается их происхождение, т. е. излучение электромагнитных волн системой электрических зарядов.

§ 9. Плоские электромагнитные волны

9.1. Уравнения Максвелла и образование электромагнитных волн. Положим в уравнениях Максвелла (2.3) $\varrho = 0$ и $\vec{j} = 0$, тогда уравнения описывают свободное электромагнитное поле в пустоте:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}. & 3.\ \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \\ 2.\ \operatorname{div}\vec{E} = 0. & 4.\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Из уравнений (9.1) непосредственно вытекает, что электрическое и магнитное поля в данном случае соленоидальны, линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются замкнутыми. В отличие от общего случая, рассмотренного выше, в § 2, источников линий электрического поля нет, и они охватывают линии переменного вектора $\vec{B}$. Магнитная составляющая любого поля соленоидальна, но в данном случае магнитное поле вызвано только «токами смещения»: линии магнитного поля охватывают линии переменного вектора $\vec{E}$.

Ни о каком разделении электромагнитного поля на самостоятель-

ные электрическое и магнитное поля, как это имело место в стационарных полях, не может быть и речи: обе компоненты электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ оказываются взаимосвязанными и взаимообусловленными. Изменение во времени одной компоненты влечет за собой появление и согласованное изменение другой, а ее изменение приводит снова к возникновению первой и т. д.

Взаимосвязь переменных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а также конечная скорость распространения поля в пространстве приводят к электромагнитной волне; процесс изменения векторов поля в пространстве и времени имеет волновой характер, т. е. состояние полей, имеющее место в некоторой точке пространства, повторяется через определенный промежуток времени в другой точке, распространяясь со скоростью c.

Волновой характер свободного поля обнаруживается уже при ближайшем исследовании уравнений (9.1). Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1) из данной системы:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).$$

Выполняя действия в левой и правой частях равенства, получим с учетом (2)

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{9.2}$$

Аналогично доказывается, что уравнения (3) и (4) эквивалентны уравнению

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{9.3}$$

Но уравнения (9.2) и (9.3) являются волновыми уравнениями; они имеют решения в виде плоских волн (см. § 5, п. 5.1):

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right), \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right).$$

Таким образом, волновой характер свободного поля выяснен.

В работах Максвелла и его ближайших последователей электромагнитные волны рассматривались как распространение колебаний особой субстанции — эфира, заполнявшего все пространство. В ту эпоху преобладал механистический подход к физическим явлениям.

Все физические процессы стремились объяснить движением частиц или движением вещества, непрерывно заполняющего пространство некоторой сплошной среды. Однако в процессе теоретического анализа свойств эфира и сопоставления его результата с экспериментом возникли непреодолимые противоречия. Например, эфиру как упругой среде с огромной скоростью распространения волн следует приписать гигантскую жесткость. Тогда становится непонятной возможность движения тел в эфире без сопротивления. Мы обсуждали уже трудности гипотезы об эфире в связи с опытами Майкельсона (см. [1], ч. II). В итоге от эфира как упругой среды, в

которой существуют волны, пришлось отказаться. Окончательно вопрос был решен в связи с созданием СТО. Физики поняли, что электромагнитное поле способно существовать само по себе, реализуясь через цепочку взаимопревращений электрической и магнитной составляющих. Эти две компоненты единого поля возбуждают друг друга, обеспечивают движение поля из одной области пространства в другую. Электромагнитные волны имеют отнюдь не механический характер колебаний некоей упругой среды и для своего существования в такой среде не нуждаются; эти волны не только волновой процесс, но и вид материи, существующий наряду с веществом.

9.2. Векторы напряженности и индукции плоской электромагнитной волны. В предыдущем пункте получены волновые уравнения для векторов поля (9.2) и (9.3). Однако для анализа особенностей свободного электромагнитного поля нам удобнее воспользоваться ранее найденными решениями уравнений поля в потенциалах.

Для вакуума при отсутствии зарядов уравнения поля в потенциалах имеют вид волновых уравнений

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Потенциалы $\vec{A}$ и φ связаны с векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ соотношениями

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Кроме того, на потенциалы наложено условие калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Покажем, что в случае свободного поля калибровку можно дополнить с целью дальнейшего упрощения системы (9.4). Воспользуемся тем, что потенциалы $\vec{A}$ и φ заданы неоднозначно. Вместо них допустимо использовать другие функции $\vec{A}'$ и φ', причем

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где ψ – произвольное решение волнового уравнения

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Положим

$$\psi = \int \varphi dt + \text{const},$$

где φ – любое решение второго уравнения системы (9.4). Такая функция ψ тоже удовлетворяет волновому уравнению. Это значит, что потенциал φ' может быть выбран тождественно равным нулю. Если $\varphi' = 0$, то из калибровки Лоренца следует равенство нулю $\operatorname{div} \vec{A}'$.

На решения уравнений (9.4) накладывают два условия:

$$\varphi = 0, \ \operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{9.5}$$

Соотношения (9.5) носят название *волновой калибровки потенциалов.* Она возможна только в свободном от зарядов пространстве, где $\varrho = 0$, так как функция $\varphi = 0$ удовлетворяет волновому уравнению, но не является решением уравнения Даламбера с отличной от нуля правой частью. Итак, второе из уравнений (9.4) отбрасывается, остается только первое. Векторы поля находятся из соотношений

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \ \operatorname{div} \vec{A} = 0; \tag{9.6}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{9.7}$$

Уравнение (9.6), как показано ранее, допускает решение в виде плоских волн:

$$\vec{A} = \vec{A}\left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right),$$

где $\vec{k}_0$ – единичный вектор, задающий направление движения фронта волны. Вычислим векторы поля плоской волны:

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}}; \tag{9.8}$$

$$\vec{B} = [\nabla \vec{A}] = \left[\nabla \left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right) \dot{\vec{A}}\right] = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}} \vec{k}_0] = \frac{1}{c} [\vec{k}_0 \vec{E}]. \tag{9.9}$$

В формулах (9.8) и (9.9) точка над буквой обозначает дифференцирование по аргументу $\left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right)$. При выводе (9.9) использована формула П. II, 23.

Из условия калибровки (9.5) следует

$$\dot{\vec{A}} \vec{k}_0 = 0.$$

(Применяется формула П. II, 16.) Но это означает, что $\dot{\vec{A}} \perp \vec{k}_0$, поэтому и $\vec{E} \perp \vec{k}_0$. В свою очередь, из (9.9) следует, что $\vec{B} \perp \vec{E}$ и $\vec{B} \perp \vec{k}_0$.

Полученные соотношения показывают, что векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}_0$ составляют правую тройку. В плоской электромагнитной волне векторы поля всегда перпендикулярны лучу – линии, по которой распространяется фронт волны. Следовательно, электромагнитная волна относится к поперечным волнам, в которых колебания каких-то физических характеристик происходят в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{k}_0$.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются функциями координат и времени, причем согласно формулам (9.8) и (9.9)

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right), \\ \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right). \end{cases} \tag{9.10}$$

Модули векторов связаны соотношением

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|. \tag{9.11}$$

Формулы (9.10) и (9.11) вместе с условием, связывающим направления векторов $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}_0$, описывают *плоские волны напряженности и индукции*, распространяющиеся в пространстве со скоростью c. Обе волны согласованы друг с другом во времени: у них одинаковые фазы, поэтому изменения векторов в каждой точке пространства происходят синхронно. В частности, они одновременно достигают максимальных и минимальных по модулю значений.

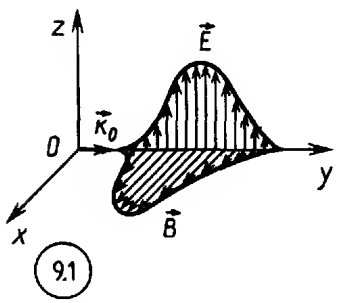
Графическая иллюстрация электромагнитной волны дана на рисунке 9.1, который представляет «мгновенную фотографию» поля, распространяющегося по оси Oy вправо.

Рассчитаем также значения плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса электромагнитных волн. С помощью формул (9.9), (9.11) и общих формул (3.6), (3.7) и (3.17) для соответствующих величин имеем

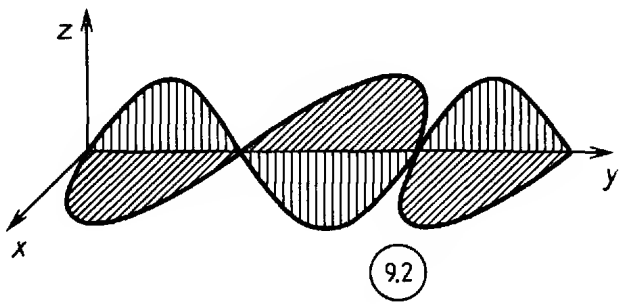
$$\begin{cases} w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2, \\ \vec{\sigma} = c\,\varepsilon_0 E^2 \vec{k}_0 = c\frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{k}_0 = cw\vec{k}_0, \\ \vec{g} = \frac{1}{c}\varepsilon_0 E^2 \vec{k}_0 = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{k}_0 = \frac{w}{c}\vec{k}_0. \end{cases} \tag{9.12}$$

Отсюда, в частности, видно, что вся энергия плоских электромагнитных волн участвует в потоке, так что между энергией и импульсом поля выполняется релятивистское соотношение

$$w = gc.$$



9.1



9.2

9.3. Гармонические составляющие свободного поля. Важное значение имеет частный случай плоских волн: волны гармонические (или монохроматические). Для них

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

откуда

$$\begin{cases} \vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} = [\vec{A}_0 \vec{k}] \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \end{cases} \tag{9.13}$$

Последние формулы удобнее представить в виде

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \end{cases} \tag{9.14}$$

причем

$$\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{k}_0 \vec{E}], \ \vec{E} \perp \vec{k}_0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \ \vec{k}_0 = \frac{\vec{k}}{k}. \tag{9.15}$$

(Графическая иллюстрация гармоники представлена на рисунке 9.2.)

В общем случае векторы свободного поля могут быть представлены суперпозицией плоских поперечных гармоник всевозможных частот, амплитуд и направлений распространения, например:

$$\vec{E} = \int \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\, d\vec{k}, \tag{9.16}$$

где применены сокращенные обозначения:

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \vec{E}_0(k_x, \ k_y, \ k_z), \ d\vec{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z.$$

Аналогичное разложение может быть записано и для вектора $\vec{B}$ с учетом формул связи (9.15) для каждой моды. (В физике часто используется термин «мода» для обозначения гармонических составляющих сложного колебательного движения.)

Вывод о существовании гармонических составляющих свободного поля следует и непосредственно из уравнений (9.2), (9.3), так как функции вида

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \ \vec{B} = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

являются их частными решениями.

Гармоника (9.14) оказывается элементом любого волнового электромагнитного поля.

Пример 9.1. **Волновой пакет.**

На практике строго монохроматические поля не встречаются, однако весьма характерен случай однонаправленных волн, близких по амплитуде и частоте. Рассмотрим в качестве примера спектрального разложения (9.16) векторы такого поля, как суперпозицию волн с примерно одинаковой амплитудой $\vec{E}_0(k)$ и волновыми числами, лежащими в узком интервале $k_0 - \Delta k \le k \le k_0 + \Delta k$. Воспользовавшись разложением (9.16), пишем для одномерного случая, где порядок следования слагаемых в показателе удобнее изменить (см. § 5, П. 5.2):

$$\vec{E} = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} \vec{E}_0(k)\, e^{i(\omega_k t - kx)}\, dk \approx \vec{E}_0(k_0) \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} e^{i(\omega_k t - kx)}\, dk.$$

Переходя к новой переменной $\xi = k - k_0$ и учитывая равенство $\omega = kc$, имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_0(k_0) \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{i(c\xi t - \xi x)}\, d\xi = 2E_0 \frac{\sin \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}{c\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \qquad (9.17)$$

Получена плоская волна с частотой ω_0 и волновым числом k_0, модулированная по амплитуде множителем

$$2E_0 \frac{\Delta\omega}{c} \frac{\sin \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}{\Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}. \qquad (9.18)$$

График квадрата амплитудного множителя (при некотором фиксированном t) изображен на рисунке 9.3, *а*.

Волновое поле (9.17) имеет заметно отличные от нуля амплитуды на отрезке (x_1, x_2) оси Ox, причем

$$\frac{\Delta\omega}{c}(x_2 - x_1) = 2\pi.$$

Таким образом, мы получили *волновой пакет*, размеры которого удовлетворяют соотношению

$$\Delta k \Delta x = 2\pi.$$

Фиксируя координату x, получаем развертку колебаний во времени. В соответствии с формулой (9.18) $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$ (рис. 9.3, *б*).

Если еще учесть существование дополнительных областей с отличной от нуля амплитудой, то получим неравенства

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi, \ \Delta\omega \Delta t \geq 2\pi. \qquad (9.19)$$

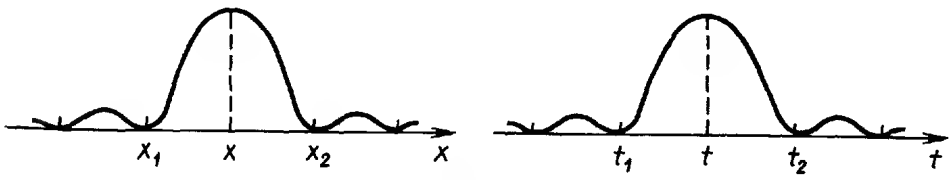
Волновой пакет движется в пространстве. Скорость перемещения его как целого называется групповой. Групповая скорость находится из условия:

$$\Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = \text{const},$$

откуда

$$v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = c. \qquad (9.20)$$

Групповая скорость пакета в вакууме оказалась равной фазовой скорости волны: $c = \frac{\omega}{k}$.



а *б*

9.3

Электромагнитные волны играют чрезвычайно важную роль в окружающей нас природе, в применяемой человеком технике. Достаточно сказать, что свет, радиоволны, рентгеновы лучи и т. д.— все это электромагнитные волны. Простейший волновой сигнал содержит начало и окончание колебаний векторов поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$, что и фиксируется в точке наблюдения как цуг электромагнитных волн. С помощью неравенств (9.19) заключаем: чем короче сигнал, тем шире спектр его частот. Таким образом, чем больше скорость передачи информации (больше число сигналов в единицу времени), тем шире необходимый интервал частот и выше максимальные частоты, применяемые для передачи.

Указанная принципиальная закономерность имеет и другой аспект: монохроматическую волну может дать лишь бесконечно долго работающий излучатель. Если же он функционировал время Δt, то в излучении будут присутствовать волны с набором частот $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{\Delta t}$. Последнее означает, что *ширина спектральной линии* ($\Delta\omega$) зависит от времени действия излучающей системы. С помощью макроскопических излучателей в настоящее время удается получить весьма узкие спектральные линии (например, с помощью квантовых генераторов).

Наконец, существен еще один момент, отражаемый формулой (9.19): если необходимо создать электромагнитное поле в ограниченной области пространства, то нужно пользоваться набором частот тем большим, чем меньше область пространства.

Пример 9.2. **Разложение по плоским волнам.**

Пусть волновое поле задано на начальный момент времени:

$$E(x,\ 0) = e^{-x^2/a^2},$$

где a — некоторая постоянная.

В произвольный момент времени поле описывается разложением (9.16):

$$E(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{i(kx - \omega t)}\, dk. \tag{1}$$

Используя начальные условия, получаем

$$e^{-x^2/a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{ikx}\, dk. \tag{2}$$

Но это — разложение известной функции в интеграл Фурье по системе ортонормированных функций e^{ikx}. Наша задача сводится к нахождению коэффициентов Фурье $E_0(k)$:

$$E_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{ika}{2}\right)^2} dx.$$

Полученный интеграл известен, он равен $a\sqrt{\pi}$. Поэтому

$$E_0(k) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-k^2a^2}{4}}.$$

Отсюда видно, что основной вклад дают компоненты, соответствующие интервалу значений волнового вектора:

$$-\frac{2}{a} \le k \le \frac{2}{a}.$$

Подставляя найденные значения $E_0(k)$ в формулу (1) и выполняя интегрирование, получим выражение для волнового поля в произвольный момент времени

$$E(x,\ t) = e^{-\frac{(x - ct)^2}{a^2}}.$$

Волновой пакет движется вдоль оси Ox со скоростью c без изменения формы.

9.4. Поляризация электромагнитных волн. В суперпозицию (9.16), описывающую произвольное свободное электромагнитное поле, входят монохроматические составляющие всевозможных частот, амплитуд и направлений распространения. При анализе этого выражения было оставлено без внимания направление колебаний в каждой гармонике. Вектор $\vec{E}_0(\vec{k})$ перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$. В остальном его направление произвольно. Очевидно, что любую гармоническую составляющую поля $\vec{E}_0(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ можно представить состоящей из двух гармоник с амплитудами, направленными по двум заранее выбранным перпендикулярным друг другу и вектору $\vec{k}$ направлениям. Обозначим соответствующие единичные векторы символами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \vec{e}_1 E_{0,1}(\vec{k}) + \vec{e}_2 E_{0,2}(\vec{k}).$$

Теперь разложение детализируется:

$$\vec{E} = \int \{\vec{e}_1 E_{0,1}(\vec{k})e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})} + \vec{e}_2 E_{0,2}(\vec{k})e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})}\}\, d\vec{k}. \qquad (9.21)$$

В зависимости от того, с какими амплитудами ($E_{0,1}(\vec{k})$ и $E_{0,2}(\vec{k})$) входят в разложение гармоники, получится то или иное направление вектора поля $\vec{E}$. Оно может оказаться переменным во времени и неодинаковым в различных точках пространства.

Плоскополяризованной называется волна, в которой направление вектора $\vec{E}$ является постоянным. Ясно, что рассмотренные ранее монохроматические волны – гармоники (9.13) – плоскополяризованные. В пакете таких гармоник с одним и тем же направлением вектора $\vec{E}$ также будет иметь место плоская поляризация.

Рассмотрим еще другой случай поляризации волн. Пусть имеются две гармоники одинаковой частоты, но с различными начальными фазами, причем одна из них имеет только отличную от нуля составляющую $\vec{e}_1 E_1$, а другая – $\vec{e}_2 E_2$. Направляя ось Oz по $\vec{k}$, а оси Ox и Oy – по $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, получим при разности фаз $\frac{\pi}{2}$

$$E_x = E_{0,1}\cos(\omega t - kz),\ E_y = E_{0,2}\sin(\omega t - kz). \qquad (9.22)$$

Геометрическим местом концов вектора $\vec{E}$ в плоскости Oxy служит эллипс

$$\frac{E_x^2}{E_{0,1}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0,2}^2} = 1,$$

а в пространстве – эллиптическая спираль с шагом $l = \frac{2\pi}{k} = \lambda$. Это так называемая *эллиптическая поляризация*. Если $E_{0,1} = E_{0,2}$, то поляризация круговая. Волны типа (9.22) излучаются некоторыми простейшими системами, например ротатором (см. задачу 4 к данной главе). Понятно, что эллиптически поляризованным окажется волновой

пакет, если он образован двумя соответствующими совокупностями гармоник (9.22).

Пример 9.3. **Выражения для векторов плоской монохроматической волны, распространяющейся по оси *Ox* (или против) и поляризованной в плоскости *Oxz*.**

$$E_x = E_y = 0,\ B_x = B_z = 0,$$

$$E_z = E_0 \cos(kx \mp \omega t),\ B_y = \frac{E_0}{c} \cos(kx \mp \omega t).$$

Пример 9.4. **Выражения для векторов поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси *Oy* и поляризованной по кругу.**

Пусть при $t = 0$ в точке $y = 0$ вектор $\vec{E}$ направлен по Oz. Тогда

$$E_{1z} = E_0 \cos(ky - \omega t),\ B_{1x} = \frac{E_0}{c} \cos(ky - \omega t),$$

$$E_{2x} = E_0 \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right),\ B_{2z} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(С вращением по часовой стрелке, если смотреть с положительного «конца» оси Oy.)

Пример 9.5. **Сложение двух монохроматических волн одинаковой частоты, фазы и направления распространения с круговой поляризацией в противоположных направлениях.**

Для волн, движущихся вдоль оси Oy, имеем

$$E_z^{(1)} = a \cos(ky - \omega t),\ E_x^{(1)} = a \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E_z^{(2)} = b \cos(ky - \omega t),\ E_x^{(2)} = b \cos\left(ky - \omega t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

где a и b – амплитуды составляющих.

Результирующее поле найдется сложением соответствующих проекций:

$$E_z = (a + b) \cos(ky - \omega t),$$

$$E_x = (a - b) \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если $a = b$, то получается плоскополяризованная волна; при $a > b$ – правая круговая; при $a < b$ – левая круговая поляризация.

§ 10. Излучение электромагнитных волн

10.1. Потенциалы электромагнитного поля вдали от системы зарядов. В общем случае произвольного движения зарядов в системе потенциалы поля φ и $\vec{A}$ описываются выражениями (5.29). Практическое вычисление потенциалов непосредственно по указанным формулам осложняется необходимостью учета запаздывания: величины ϱ и $\vec{j}$ должны браться для каждой точки $\vec{r}_0$ в различные моменты времени $t - \frac{r'}{c}$. Поэтому оказывается возможным рассчитать поле лишь приближенно и при некоторых ограничениях, касающихся системы зарядов.

Важное значение имеют электронейтральные системы зарядов,

занимающие ограниченную область пространства. Рассмотрим поле такой системы на больших расстояниях от нее. Система может быть охарактеризована в целом электрическим и магнитным дипольными моментами $\vec{p}$ и $\vec{m}$ так, как это было уже сделано в § 6 и § 8. Но теперь в силу нестационарности движения зарядов дипольные моменты не постоянны, они являются функциями времени. Произведем расчет потенциалов поля с учетом этой зависимости.

При $r_0 \ll r$ (см. рис. 6.4) используем приближенные выражения для входящих в потенциалы величин $\frac{1}{r'}$ и r', ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \approx \frac{1}{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)(-\vec{r}_0) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r^3}; \tag{10.1}$$

$$r' = |\vec{r} - \vec{r}_0| \approx r + (\operatorname{grad} r)(-\vec{r}_0) = r - \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{r}. \tag{10.2}$$

В формулы для потенциалов входит величина $t - \frac{r'}{c}$. В первом приближении согласно (10.1)

$$t - \frac{r'}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{rc} = \tau + \frac{\vec{r}\vec{r}_0}{rc},$$

где $\tau = t - \frac{r}{c}$ — время с учетом запаздывания на «общем» расстоянии r от системы до точки наблюдения, а слагаемое $\frac{\vec{r}\vec{r}_0}{rc}$ имеет смысл собственного времени запаздывания по отношению к точке O, принятой за «центр» системы. Вводя единичный вектор направления на точку наблюдения $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, имеем

$$t - \frac{r'}{c} \approx \tau + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}. \tag{10.3}$$

Предполагается, что собственное время запаздывания для всех точек системы много меньше τ. Это позволяет разложить функции $\varrho\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)$ и $\vec{j}\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)$ в ряд по степеням малой величины $\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}$ и ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$\varrho\left(\tau + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right) \approx \varrho(\tau) + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\dot{\varrho}(\tau), \quad \vec{j}\left(\tau + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right) \approx \vec{j}(\tau) + \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\dot{\vec{j}}(\tau).$$

Здесь точки обозначают частные производные функции по τ или t. Выполняя подстановку полученных выражений в формулы для потенциалов поля (5.29) и используя (10.1), получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\varphi = k\int\limits_{V_0} \frac{\varrho(\vec{r}_0,\tau)}{r}dV_0 + k\int\limits_{V_0} \frac{\varrho(\vec{r}_0,\tau)\vec{r}_0\vec{n}}{r^2}dV_0 + k\int\limits_{V_0} \frac{\dot{\varrho}(\vec{r}_0,\tau)\vec{r}_0\vec{n}}{cr}dV_0 + \ldots \quad (10.4)$$

$$\vec{A} = f\int\limits_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0,\tau)}{r}dV_0 + f\int\limits_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0,\tau)\vec{r}_0\vec{n}}{r^2}dV_0 + f\int\limits_{V_0} \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}_0,\tau)\vec{r}_0\vec{n}}{cr}dV_0 + \ldots \quad (10.5)$$

Эти приближенные выражения для потенциалов поля применимы, как уже говорилось, при условии малости собственного времени запаздывания по сравнению с общим запаздыванием. Кроме этого, необходимо, чтобы за время собственного запаздывания не слишком сильно изменялись плотности зарядов и токов ϱ и $\vec{j}$: в противном случае нельзя будет пользоваться разложениями ввиду больших значений $\dot{\varrho}$ и $\dot{\vec{j}}$. Заряды в системе за время собственного запаздывания проходят расстояние порядка $v\frac{r_0}{c}$. Если это расстояние мало по сравнению с размерами системы r_0, то за время собственного запаздывания расположение зарядов существенно не изменяется и принятое приближение допустимо. Условием его применимости служит сильное неравенство

$$\frac{v}{c}r_0 \ll r_0,$$

из которого следует

$$v \ll c,$$

т. е. скорости движения зарядов в системе должны быть нерелятивистскими.

Приступаем к анализу формулы (10.4). Первое слагаемое

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{r}$$

имеет смысл потенциала точечного заряда Q, равного заряду системы. Для электронейтральной системы оно равно нулю. Второе слагаемое дает потенциал, имеющий волновой характер и определяющийся дипольным электрическим моментом системы, взятым в момент времени τ. Используя определение дипольного момента (6.15), получаем

$$\varphi_2 = \frac{k\vec{n}}{r^2}\int\limits_{V_0}\vec{r}_0\varrho(\vec{r}_0,\tau)\,dV_0 = \frac{k}{r^2}\vec{n}\vec{p}(\tau).$$

Поле φ_2 быстро убывает с ростом r, оказываясь на больших расстояниях от системы зарядов меньше третьего, основного в так называемой волновой зоне ($r \gg r_0$), слагаемого:

$$\varphi_3 = \frac{k\vec{n}}{rc}\int\limits_{V_0}\vec{r}_0\dot{\varrho}(\vec{r}_0,\tau)\,dV_0 = k\frac{\vec{n}}{cr}\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0}\vec{r}_0\varrho(\vec{r}_0,\tau)\,dV_0 = \frac{k}{cr}\vec{n}\dot{\vec{p}}(\tau). \quad (10.6)$$

Далее исследуем выражение (10.5) для векторного потенциала. Уже первое слагаемое не равно нулю и оказывается существенно важным в вопросе об излучении. (Здесь имеется отличие от выводов § 8, п. 8.3, где рассматривался стационарный случай и токи в системе были замкнутыми. Сейчас же движение зарядов произвольное.) Согласно формуле (10.5) в первом приближении

$$\vec{A} \simeq \vec{A}_1 = f \frac{1}{r} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau)\, dV_0.$$

Покажем, что векторный потенциал $\vec{A}_1$ и скалярный потенциал φ_3 связаны друг с другом простым соотношением. Для этого преобразуем выражение (10.6), используя уравнение непрерывности (1.6):

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{r}_0 \dot{\varrho}(\vec{r}_0, \tau)\, dV_0 = -k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau)\, dV_0.$$

Рассчитаем проекцию интеграла

$$\int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau)\, dV_0$$

на ось Ox. Для вычислений применим тождество (см. П. II, 15) и получим

$$\int_{V_0} x_0 \operatorname{div} \vec{j}\, dV_0 = \int_{V_0} \operatorname{div}(x_0 \vec{j})\, dV_0 - \int_{V_0} j_x\, dV_0.$$

Преобразуем интеграл с дивергенцией в правой части равенства по теореме Гаусса:

$$\int_{V_0} \operatorname{div}(x_0 \vec{j})\, dV_0 = \oint_S x_0 \vec{j}\, \overrightarrow{dS}\ .$$

Интегрирование производится по поверхности S, ограничивающей объем V_0. Так как заряды за пределы системы не выходят, интеграл обращается в нуль. Тогда

$$\int_{V_0} x_0 \operatorname{div} \vec{j}\, dV_0 = -\int_{V_0} j_x\, dV_0,$$

и поэтому

$$\int_{V_0} \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}\, dV_0 = -\int_{V_0} \vec{j}\, dV_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau)\, dV_0 = \frac{k}{fc} \vec{A}_1 \vec{n}. \tag{10.7}$$

Вспоминая, что $k = c^2 f$, и учитывая формулу (10.6), имеем

$$\varphi_3 = c \vec{A}_1 \vec{n},\ \vec{A}_1 = \frac{f}{r} \dot{\vec{p}} = \frac{k}{c^2 r} \dot{\vec{p}}. \tag{10.8}$$

Обе величины $-\varphi_3$ и A_1 — задаются скоростью изменения электри-

ческого дипольного момента системы во времени, т. е. величиной $\dot{\vec{p}}$. Учитывая характер зависимости дипольного момента от времени $\left(\vec{p} = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$, заключаем, что поле (10.8) представляет собой волну, распространяющуюся по радиальным направлениям от системы зарядов. Следовательно, мы имеем дело с электромагнитными волнами, излучаемыми движущимися зарядами. Поле, определяемое потенциалами φ_3 и $\vec{A}_1$, называется *электрическим дипольным излучением*.

По модулю скалярный потенциал φ_3 в c раз больше векторного $\vec{A}_1$. Как мы увидим в следующем пункте, это приводит к соотношению между векторами поля $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. Но именно такая связь характерна для электромагнитных волн (см. формулу (9.15)). Поэтому оба потенциала φ_3 и $\vec{A}_1$ вносят равноценный вклад в излучение и являются однопорядковыми в разложениях.

Дипольное электрическое излучение системы может отсутствовать (см. § 10, п. 10.2). В таких случаях нужно использовать следующие члены в разложениях (10.4) и (10.5). Скалярный потенциал определяется четвертым слагаемым, не выписанным в формуле (10.4). Он ответствен за электрическое квадрупольное излучение, которое здесь изучаться не будет. Обратимся к слагаемым $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$ в формуле (10.5). Выражения

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2}\int_{V_0}(\vec{r}_0\,\vec{n})\,\vec{j}\,(\vec{r}_0,\tau)\,dV_0 \quad \text{и} \quad \vec{A}_3 = \frac{f}{cr}\int_{V_0}(\vec{r}_0\vec{n})\,\dot{\vec{j}}\,(\vec{r}_0,\ \tau)\,dV_0$$

по структуре аналогичны рассматривавшемуся ранее выражению (8.9). После ряда преобразований соотношение (8.9) принимает вид (8.12). Используя те же приемы вычислений, можно получить новые формулы для потенциалов $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$, сходные по форме с выражением (8.12). Поэтому их можно записать сразу, минуя выкладки, по аналогии с формулой (8.12):

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2}\,[\vec{m}\,(\tau)\vec{n}]; \tag{10.9}$$

$$\vec{A}_3 = \frac{f}{cr}\,[\vec{m}\,(\tau)\vec{n}]. \tag{10.10}$$

На больших расстояниях от системы, в волновой зоне $A_2 \ll A_3$. Поэтому следует принимать в расчет только потенциал $\vec{A}_3$. Он определяет так называемое *магнитное дипольное излучение*.

10.2. Электрическое дипольное излучение. Пользуясь потенциалами поля φ_3 и $\vec{A}_1$, найдем векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ электрического дипольного излучения. Сначала вычислим магнитную индукцию:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\frac{k\dot{\vec{p}}(\tau)}{c^2 r} = \frac{f}{r}\operatorname{rot}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + f\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{p}\right]$$

Последнее слагаемое дает величину, убывающую пропорционально квадрату расстояния, а первое – пропорционально первой степени. Поэтому, не уменьшая точности расчета, вторым слагаемым можно пренебречь и принять

$$\vec{B} = \frac{f}{r} \qquad \dot{\vec{p}} = \frac{f}{r}\left[\operatorname{grad}\left(t - \frac{r}{c}\right)\ddot{\vec{p}}(\tau)\right] = \frac{f}{cr}[\ddot{\vec{p}}(\tau)\,\vec{n}]. \tag{10.11}$$

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ найдем по формуле (4.2). Предварительно заметим, что $\operatorname{grad}\varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\dot{\varphi}(\tau)\frac{\vec{n}}{c}$. Тогда $\vec{E} = \frac{\vec{n}\varphi(\tau)}{c} - \dot{\vec{A}}(\tau)$.

Используя соотношение (10.8), получаем

$$\vec{E} = \vec{n}(\vec{n}\vec{A}) - \dot{\vec{A}} = \left[[\dot{\vec{A}}\,\vec{n}]\,\vec{n}\right],$$

$$\text{или } \vec{E} = \frac{f}{r}\left[[\ddot{\vec{p}}\,\vec{n}]\,\vec{n}\right] = c\,[\vec{B}\,\vec{n}]. \tag{10.12}$$

В формулах (10.11) и (10.12) функции $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ зависят от характерного для сферических волн аргумента $t - \frac{r}{c}$. Волна распространяется по радиусам от начала координат. (Именно в этой точке находится излучающая система зарядов.) Направление движения фронта волны в любой точке задается вектором $\vec{n}$. По мере удаления от систем напряженность и индукция поля уменьшаются пропорционально $\frac{1}{r}$. Однако сходство со сферической волной здесь не полное; далее мы увидим, что волновое поле (10.11), (10.12) не обладает сферической симметрией, интенсивность поля по различным направлениям неодинакова.

Как и для плоской волны, векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{n}$ образуют правую тройку. Связь между модулями $E = cB$ та же, что и для плоской волны. (Это и свидетельствует о правильности отнесения потенциалов φ_3 и $\vec{A}_1$ к одному и тому же приближению.) Остается заметить, что излучение имеет место только при условии $\ddot{\vec{p}} \neq 0$. Очевидно также, что волновое поле будет периодическим, если величина $\ddot{\vec{p}}$ – периодическая функция времени. Например, при гармонической зависимости дипольного момента $\vec{p}$ от времени излучается соответствующая по частоте монохроматическая волна.

Рассмотрим также пространственное распределение поля (10.12) относительно заданного направления $\ddot{\vec{p}}$. Пусть ось Oz направлена по вектору $\ddot{\vec{p}}$. Тогда

$$\vec{E} = \frac{f}{r}\left\{\vec{n}(\vec{n}\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}\right\} = \left\{\vec{n}\,|\ddot{\vec{p}}|\cos\vartheta - \ddot{\vec{p}}\right\}\frac{f}{r}.$$

Таким образом, вектор $\vec{E}$ лежит в меридиональной плоскости, проходящей через векторы $\ddot{\vec{p}}$ и $\vec{n}$ (рис. 10.1). Если воспользоваться тройкой единичных векторов $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ и $\vec{e}_a$ (рис. 10.2), то получим удобные выражения

$$\vec{E} = \frac{f}{r} |\ddot{\vec{p}}| \sin\vartheta \, \vec{e}_\vartheta,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{cr} |\ddot{\vec{p}}| \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi. \qquad (10.13)$$

Формулы (10.13) показывают, что максимум излучения лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\ddot{\vec{p}}$ (плоскость Oxy). Поле обладает осевой симметрией.

В соответствии с формулой (3.7) плотность потока энергии

$$\vec{\sigma} = \frac{f^2}{c\mu_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \sin^2\vartheta \, \vec{n} = \frac{f}{4\pi c} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \sin^2\vartheta \, \vec{n}. \qquad (10.14)$$

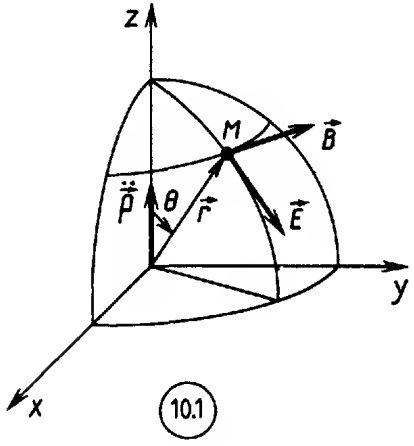
Часто нужно знать полный поток энергии по всем направлениям за единицу времени или мощность, излучаемую системой:

$$N = \oint \vec{\sigma} \, \overrightarrow{dS}.$$

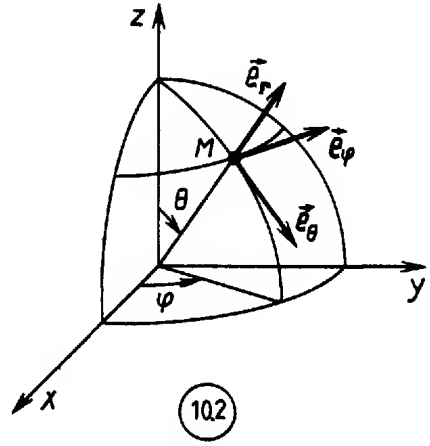
Расчет удобнее сделать в сферических координатах. Получаем

$$N = \frac{f |\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\vartheta \, r^2}{r^2} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2f}{3c} |\ddot{\vec{p}}|^2. \qquad (10.15)$$

Систему, излучающую электромагнитные волны, характеризуют также величиной, называемой *интенсивностью излучения*. По опре-



10.1



10.2

делению интенсивность — поток энергии, проходящий в некотором телесном угле $d\Omega$ или проходящий через некоторую площадку $dS = r^2 d\Omega$. Так что для элементарной площадки

$$dN = \vec{\sigma}\, \overrightarrow{dS}. \tag{10.16}$$

Очевидно, излучаемая системой мощность (10.15) есть не что иное, как полная интенсивность излучения.

Пример 10.1. **Излучение ускоренно движущегося точечного заряда.**

Воспользуемся выражением дипольного момента системы зарядов (6 16)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{0i}\, q_i$$

и найдем вторую произаодную от $\vec{p}$ по аремени, определяющую согласно изложенному аыше все параметры излучения:

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{n} \ddot{\vec{r}}_{0i}\, q_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_{0i}\, q_i,$$

где $\vec{a}_{0i}$ — ускорение i-го заряда (рис. 10.3). В соотаетствии с принципом суперпозиции полей электромагнитная волна, излученная системой зарядов, есть суперпозиция аолн, излученных каждым ускоренно даижущимся зарядом q_i. Применимость этого положения а теории излучения обеспечиаается линейностью саязи вектороа поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с параметром $\ddot{\vec{p}}$. Благодаря указанному саойству формул (10.11) и (10.12) слагаемые $\vec{a}_{0i}\, q_i$ могут рассматриваться как отдельные источники волн Поле излучения i-го заряда характеризуется величинами

$$\vec{E}_i = \frac{f q_i}{r}\left[\,[\vec{a}_i\, \vec{n}]\, \vec{n}_i\right],\quad \vec{B}_i = \frac{f q_i}{cr}[\vec{a}_i\, \vec{n}\,].$$

Все выводы о (мгноаенном) пространственном распределении поля, о потоке энергии, сделанные в § 10, п. 10.2 для диполя, остаются в силе для отдельного ускоренно движущегося точечного заряда (при замене а формулах $\ddot{\vec{p}}$ на $q\vec{a}$). Важно подчеркнуть, что излучают электромагнитные аолны только ускоренно движущиеся заряды, ибо в противном случае $\ddot{\vec{p}} = 0$. И наконец, следует сказать, что, сводя излучение движущегося заряда к излучению неподвижного диполя, мы неизбежно ограничиваемся нерелятиаистскими скоростями движения заряда (см. общий анализ вопроса а § 10, п. 10.1).

Пример 10.2. **Излучение гармонического осциллятора.**

Изменяющийся со аременем дипольный момент

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

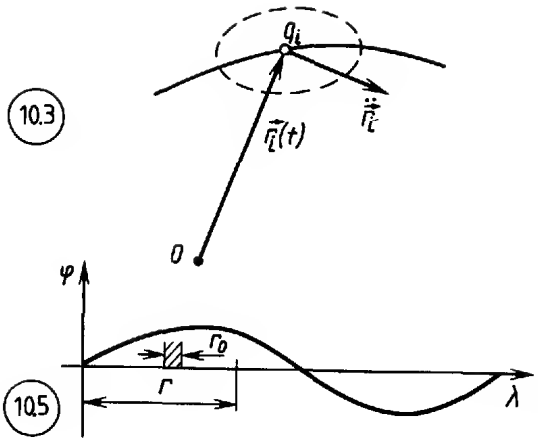
создает дипольное электрическое излучение, определяемое векторами

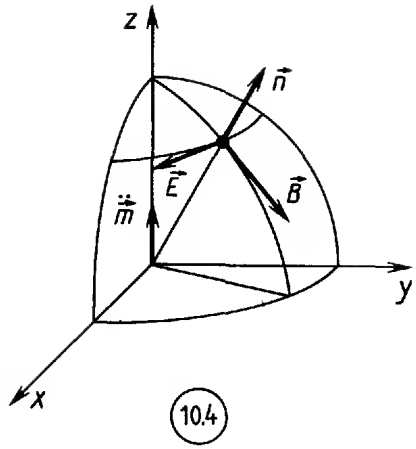
$$\vec{E} = \frac{f}{r} p_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{rc} p_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\varphi.$$

Мощность излучения раана:

$$N = \frac{2 f p_0^2 \omega^4}{3c} \sin^2(\omega t - kr),\ k = \frac{\omega}{c}.$$





Мощность быстро растет с частотой колебаний ($\sim \omega^4$). Однако применимость формул ограничена условием: $v \ll c$, где v – скорость движения зарядов. Отсюда следует

$$\frac{r_0 \omega}{c} \ll 1,$$

где r_0 – параметр, определяющий размеры системы. Для атомов $r_0 \sim 10^{-10}$ м; следовательно, $\omega \ll 10^{18} \frac{1}{\text{с}}$. Частота света $\omega \sim 10^{15} \frac{1}{\text{с}}$, т. е. данный критерий выполняется.

Предлагаем читателям подумать над возможными путями практической реализации излучающего гармонического осциллятора.

Пример 10.3. **Расчет излучения атома и несостоятельность классической планетарной модели атома.**

Представим атом как систему, состоящую из ядра и электрона, обращающегося вокруг ядра по законам классической механики. Ускорение электрона найдется из условия:

$$ma = \frac{mv^2}{r} = k\frac{Ze^2}{r^2},$$

откуда

$$a = \frac{kZe^2}{mr^2}.$$

Вектор дипольного момента системы определится формулой

$$\vec{p} = e\vec{r}.$$

Он вращается в плоскости орбиты. Его вторая производная, необходимая для расчета параметров излучения, определяется через ускорение:

$$|\ddot{\vec{p}}| = e|\ddot{\vec{r}}| = \frac{kZe^3}{mr^2}.$$

Мощность излучения находим с помощью выражения (10.15). Она равна:

$$N = \frac{2fk^2Z^2e^6}{3cm^2r^4}.$$

Используя для оценки данные, указанные в примере 10.2, получим значение порядка $0{,}6 \cdot 10^{-7}$ Дж/с. При излучении должна уменьшаться механическая энергия движения электрона, т. е. сумма его кинетической и потенциальной энергий. (При приближении электрона вплотную к ядру выделится энергия $\sim \frac{kZe^2}{r_я} \approx 2 \cdot 10^{-13}$ Дж. Кинетическая энергия имеет порядок величины $2 \cdot 10^{-18}$ Дж.) В результате потери энергии на излучение электрон не может стационарно двигаться по орбите и упадет на ядро. Отсюда следует вывод о несостоятельности использованной планетарной модели атома.

10.3. Магнитное дипольное излучение. Сопоставляя выражения электрического дипольного и магнитного дипольного потенциалов, можно показать, что отношение их модулей по порядку величины в общем случае равно $\frac{c}{v}$. (Это видно из того, что в плотность тока входит скорость движения заряда.) При условии $v \ll c$ электрическое дипольное излучение по интенсивности на много порядков больше магнитного дипольного излучения. Однако при $\ddot{\vec{p}} = 0$ на первый план выходит магнитное дипольное излучение, определяющееся векторным потенциалом (10.10).

Найдем векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в этом случае:

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr}[\ddot{\vec{m}}(\tau)\vec{n}], \tag{10.17}$$

$$\vec{B} = \frac{f}{cr}\left[\operatorname{grad}\left(t - \frac{r}{c}\right)[\dot{\vec{m}}(\tau)\,\vec{n}]\right] + \frac{f}{c}\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}[\dot{\vec{m}}\vec{n}]\right].$$

Второе слагаемое в формуле для индукции следует в рассматриваемом приближении отбросить, так как оно содержит множитель $\frac{1}{r^2}$, поэтому

$$\vec{B} = -\frac{f}{c^2 r}\left[\vec{n}[\ddot{\vec{m}}(\tau)\,\vec{n}]\right] = \frac{1}{c}[\vec{n}\,\vec{E}]. \tag{10.18}$$

Взаимное расположение векторов $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{n}$ показано на рисунке 10.4.

Таким образом, мы вновь имеем дело со сферической волной, аналогичной рассмотренной в § 10, п. 10.2. Несмотря на дополнительный множитель c в знаменателе, магнитное дипольное излучение может быть весьма значительным при больших значениях $\ddot{\vec{m}}$, что может иметь место в системе с большими и быстроизменяющимися токами.

Рамки пособия не позволили включить описание электрического квадрупольного излучения системы. Оно принимается в расчет, когда дипольное излучение отсутствует. Что касается отношения интенсивностей магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений, то в общем виде его оценить нельзя.

Мы рассмотрели магнитное дипольное излучение, опустив элек-

трическое квадрупольное потому, что первое очень важно в практике: широко применяются рамочные излучатели-антенны с переменным током.

Пример 10.4. **Расчет излучения рамки с током.**

Круглая рамка с током расположена в плоскости Oxy, центр ее совпадает с началом координат. Сила тока в рамке изменяется по закону $I = I_0 \sin \omega t$ Определим магнитное дипольное излучение рамки.

Магнитный дипольный момент рамки равен: $\vec{m} = \vec{k}\pi a^2 I_0 \sin \omega t$, где a – радиус рамки, а $\vec{k}$ – единичный вектор оси Oz. Для векторов поля с помощью формул (10.17) – (10.18) имеем (см. рис. 10.4)

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr} |\ddot{\vec{m}}| \sin \vartheta \, \vec{e}_a,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{c^2 r} |\ddot{\vec{m}}| \sin \vartheta \, \vec{e}_\vartheta$$

Здесь

$$\ddot{\vec{m}} = \pi a^2 I_0 \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{k}$$

Вектор Умова-Пойнтинга равен:

$$\vec{\sigma} = \frac{f}{4\pi c^3 r^2} |\ddot{\vec{m}}|^2 \sin^2 \vartheta \vec{n}.$$

Полная мощность излучения получается интегрированием по сфере с $r \gg a$

$$N = \frac{2\pi^2 f}{3c^3} a^4 I_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Излучение сосредоточено преимущественно в плоскости рамки.

10.4*. Понятие о волновой и квазистатической зонах. Допустим, что дипольный момент системы $\vec{p}$ есть периодическая функция времени. В этом случае появляется характерный параметр, определяющий свойства излучающей системы зарядов. Им будет период T или соответствующая длина волны $\lambda = cT$. В § 10, п. 10.1 были найдены приближенные выражения для потенциалов φ и $\vec{A}$. Правомерность их использования определялась только большими по сравнению с размерами системы расстояниями ($r \gg r_0$). Теперь характер и степень точности принятого приближения можно уточнить, сравнивая r и r_0 с λ. Напомним определение: длина волны есть наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковой фазе. За один период волна (возмущение, изменение состояния поля, фаза волны, волновой фронт и т. д.) сдвинется в пространстве на отрезок, равный λ.

Пусть размеры системы значительно меньше длины волны излучаемых электромагнитных волн, т. е.

$$r_0 \ll \lambda. \tag{10.19}$$

В таком случае возможно разделение пространства на ближнюю к системе зарядов зону ($r \ll \lambda$) и дальнюю зону ($r > \lambda$), причем разло-

жения (10.4) и (10.5) потенциалов применимы и в ближней зоне.

Дальняя зона уже исследована ранее достаточно полно. Рассмотрим поле в ближней зоне. Для электронейтральной системы сейчас нет оснований пренебрегать вторым слагаемым в формуле (10.4):

$$\varphi_2 = \frac{k}{r^2}\vec{p}\,\vec{n}.$$

Если

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t,$$

то

$$\varphi_2 = \frac{kp_0}{r^2}\cos\vartheta \cos \omega\tau.$$

Сравним φ_2 с потенциалом φ_3. У нас

$$\varphi_3 = \frac{cf}{r}\dot{\vec{p}}\,\vec{n} = -\frac{k2\pi p_0 \cos\vartheta}{\lambda r}\sin \omega\tau.$$

В ближней зоне

$$\left|\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right| \sim \frac{\lambda}{r} > 1.$$

(Все остальные члены разложений для скалярного и векторного потенциалов в c раз меньше φ_3, см. § 10, п. 10.1.)

Становится очевидным, что поле в ближней зоне определяется членом φ_2, совпадающим по виду с потенциалом электростатического поля в дипольном приближении. Что касается его «волновой» зависимости от времени $\tau = t - \frac{r}{c}$, то она здесь малосущественна: для области $r \ll \lambda$ запаздывания пренебрежимо малы, и колебания потенциала в этих точках могут быть приняты за синхронные с колебаниями дипольного момента (рис. 10.5). Это верно и в отношении векторного потенциала $\vec{A}_2$. Таким образом, поле в ближней зоне является квазистатическим (почему данная зона и называется квазистатической).

Возможность выделения ближней и дальней зон, законность используемых приближений зависят от конкретных условий задачи. Не для всех систем возможно одновременное выполнение трех неравенств: при $r > \lambda$ и $\lambda \gg r_0$, $r \gg r_0$. В качестве примера предлагаем читателю установить границы зон для антенны телецентра ($\lambda \approx 1$ м, $r_0 \approx 1$ м) и провода длиной 1 м с переменным током технической частоты 50 Гц.

10.5*. Спектральное разложение излучения. Как было показано выше, система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитные волны. В § 9, п. 9.3 было установлено, что электромагнитное поле в свободном состоянии всегда может быть разложено на гармоники (см. формулу (9.16)). Для того чтобы проследить связь

электромагнитных волн (по происхождению) с системой излучивших их зарядов, необходимо показать, как излучение системы распадается на гармонические составляющие. Сделаем это для волновой зоны в дипольном приближении.

В общем случае плотности заряда и тока как функции времени могут быть представлены разложениями в интеграл Фурье:

$$\varrho(\vec{r}_0, t) = \int \varrho_0(\omega, \vec{r}_0)\, e^{i\omega t}\, d\omega; \tag{10.20}$$

$$\vec{j}(\vec{r}_0, t) = \int \vec{j}_0(\vec{r}_0, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{10.21}$$

При расчете потенциалов поля по формулам (5.29) или непосредственно по формулам дипольного приближения (10.7), (10.8) в силу линейности производимых операций разложение повторится для промежуточных и окончательных результатов. Так, дипольные моменты примут вид

$$\vec{p}(\tau) = \int \vec{p}_0(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega; \tag{10.22}$$

$$\vec{m}(\tau) = \int \vec{m}_0(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{10.23}$$

причем

$$\vec{p}_0(\omega) = \int \vec{r}_0\, \varrho_0(\omega, \vec{r}_0)\, dV_0, \vec{m}_0(\omega) = \frac{1}{2}\int [\vec{r}_0,\ \vec{j}_0(\vec{\omega}, \vec{r}_0)]\, dV_0.$$

С помощью выражений (10.22) и (10.23) найдем формулы для векторов излучаемого поля:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{cr}\int \omega^2 [\vec{p}_0(\omega)\, \vec{n}]\, e^{i\omega\tau}\, d\omega; \tag{10.24}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{r}\int \omega^2 \left[[\vec{p}_0(\omega)\, \vec{n}]\vec{n}\right] e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{10.25}$$

Если еще учесть, что

$$\omega\tau = \omega t - \frac{\omega r}{c} = \omega t - kr,$$

то формулы (10.24) и (10.25) предстают перед нами как спектральные разложения сферических волн на гармонические составляющие всевозможных частот, обусловленных соответствующими гармониками колебаний зарядов.

Коэффициенты разложения в данном случае равны:

$$\vec{B}_0 = -\frac{f\omega^2}{cr}[\vec{p}_0\, \vec{n}],\ \vec{E}_0 = -\frac{f\omega^2}{r}\left[[\vec{p}_0\, \vec{n}]\, \vec{n}\right]. \tag{10.26}$$

Они зависят от частоты гармоники, направления и величины вектора $\vec{p}_0(\omega)$, а также от направления излучения.

Спектральный состав излучения определяется набором частот излучателей ($\vec{p}_0(\omega)$, $\vec{m}_0(\omega)$). Характерно, что при прочих равных усло-

виях амплитуды векторов поля пропорциональны квадратам частот, а потоки энергии – интенсивность излучения – даже четвертой степени частоты. Это означает, что «легче» излучают высокочастотные осцилляторы.

Из разложений также видно, что строго монохроматическая волна может быть испущена только строго гармоническим осциллятором. Всякие отклонения от гармоничности дают излучение, занимающее полосу частот той или иной ширины. В частности, как это было показано в примере 9.1, колебания, длящиеся конечное время, занимают некоторый частотный интервал.

Завершая теоретическое рассмотрение воросов об электромагнитном поле в пространстве без зарядов и об излучении электромагнитных волн системами движущихся зарядов, необходимо подчеркнуть, что нами выяснена природа и происхождение радиоволн в широком диапазоне частот. Однако не все закономерности образования электромагнитных излучений могут быть поняты на основе изученного материала: короткие электромагнитные волны, в частности световые, излучаются микросистемами электрических зарядов (атом, молекула, кристалл), для которых макроскопическая электродинамика неприменима. И тем не менее многие формулы для излучения в дипольном приближении, выведенные выше в этом параграфе, остаются в силе как результат некоторого усреднения микрокартины излучения, носящего квантовый характер.

§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом

11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле. Выше рассматривалось электромагнитное поле, создаваемое системой электрических зарядов. Поставим теперь вопрос о движении в этом поле точечного заряда. Поле может считаться внешним при условии, если движение рассматриваемого заряда q не изменяет векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Обсудим это условие детальнее. Пусть система Q создает поле $(\vec{E}, \vec{B})$, в которое помещен заряд q. Разумеется, заряд также создает собственное поле $(\vec{E}', \vec{B}')$, накладывающееся на поле $(\vec{E}, \vec{B})$. Но практически осуществим случай, когда внешнее поле определяет движение заряда q, а собственное поле не меняет конфигурацию и движение зарядов Q, тем самым не оказывая влияние и на созданное ими поле $(\vec{E}, \vec{B})$. Иными словами, поле $(\vec{E}, \vec{B})$ никак не связано с движением заряда q и рассматривается по отношению к нему в качестве внешнего заданного поля. Так возникает задача о заряде, внесенном в электромагнитное поле. Кроме того, заметим, что самодействием, т. е. действием поля $(\vec{E}', \vec{B}')$, на движение создавшего его заряда q часто можно пренебречь.

Общая задача о заряде во внешнем поле подразделяется на несколько частных. Во-первых, возможен случай движения без излуче-

ния – это просто задача механики на движение под действием заданной силы Лоренца. (Такая задача решена в релятивистской динамике для движения точечного заряда в постоянном электрическом и магнитном полях. (См. [1], ч. II, примеры 6.6 и 6.7.) Но в случае ускоренного движения заряд излучает, т. е. не вся сообщаемая ему внешним полем энергия идет на повышение кинетической энергии заряда: часть ее теряется вместе с излучаемыми электромагнитными волнами. Поэтому, во-вторых, имеется задача о движении заряда при наличии излучения. Здесь возникает необходимость учесть самодействие, т. е. действие собственного поля на заряд. В-третьих, возможна задача об излучении заряда вследствие его движения, вызванного внешним полем, причем излученная волна сопоставляется с падающей. Это задача на рассеяние. Самодействие здесь может учитываться или не учитываться.

Все три типа задач, связанных с движением зарядов в поле, имеют практическое значение. Мы в соответствии с рамками курса разберем лишь излучение свободного заряда под действием внешнего поля. Предварительно уточним ранее изученные (см. [1]) уравнения движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле, учитывая теперь и излучение.

Движение заряженной материальной точки в электромагнитном поле описывается классическим или релятивистским механическим уравнением движения для силы Лоренца (2.25). Однако после рассмотрения вопроса об излучении электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом становится очевидным, что в таком виде уравнение движения не всегда будет правильно описывать движение излучающего заряда: потеря энергии и импульса на излучение с механической точки зрения эквивалентна действию на заряженную материальную точку некоторой тормозящей силы, называемой силой *радиационного трения*. Определим величину силы радиационного трения для излучения, которое можно рассматривать в дипольном приближении. Так как полная мощность излучения определяется согласно формуле (10.15) второй производной по времени от дипольного момента, а для точечного заряда $\vec{p} = q\vec{r}$, то

$$N = \frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \tag{11.1}$$

Поэтому сила, действующая на заряд и направленная навстречу скорости, удовлетворяет уравнению

$$\vec{F}_r \vec{v} = -\frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \tag{11.2}$$

Выражая отсюда силу $\vec{F}_r$, учтем следующее важное обстоятельство: дипольное приближение справедливо для случая движения заряда в небольшой по сравнению с расстоянием до точки наблюдения области пространства. Это требование значительно ограничивает общность задачи.

Усредним силу торможения за время, в течение которого заряд многократно проходит указанную область. В таком случае на основании тождества $\dddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}) - (\ddot{\vec{r}})^2$ можно заключить, что сила радиационного трения определяется выражением

$$\vec{F}_r = \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec{r}} = \frac{2fq^2}{3c}\dot{\vec{a}}, \tag{11.3}$$

где $\vec{a}$ — ускорение материальной точки, несущей заряд. Величина $\frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})$ есть полная производная по времени. При усреднении по движению заряда в ограниченной области пространства она исчезает. Величина $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})\,dt = \frac{\ddot{\vec{r}}(\tau)\dot{\vec{r}}(t) - \ddot{\vec{r}}(0)\dot{\vec{r}}(0)}{\tau}$ достаточно мала, если интервал изменения $\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}$ конечен, а τ велико.

Формула (11.3) применима с рядом ограничений. Во-первых, движение должно быть нерелятивистским ($v \ll c$), иначе несправедливо само дипольное приближение. Во-вторых, как мы сейчас увидим, радиационная сила должна быть значительно меньше силы Лоренца, чтобы уравнение движения заряда имело смысл. Наконец, это лишь среднее значение силы.

Итак, мы пришли к силе, зависящей от скорости изменения ускорения. Такие силы в механике не рассматриваются, и, вообще говоря, они приводят к противоречащим опыту результатам. Запишем уравнение движения с учетом силы торможения (11.3):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec{r}}. \tag{11.4}$$

В случае, когда $F \ll F_r$, уравнение принимает вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{2fq^2}{3c}\dddot{\vec{r}} \tag{11.5}$$

и его решением служит, как в этом легко убедиться непосредственным дифференцированием, функция

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{\frac{3mc}{2fq^2}t}.$$

Отсюда следует, что ускорение движения неограниченно растет вследствие излучения, а это, в свою очередь, приводит к увеличению интенсивности излучения. Происходит неограниченный саморазгон частицы и рост излучения вопреки закону сохранения энергии. Поэтому уравнение (11.4) применяют только в случаях $F \gg F_r$, когда ускорение частице в основном придает сила Лоренца, а радиационное трение лишь незначительно влияет на скорость. В таких случаях уравнение (11.4) достаточно точно описывает движение.

11.2. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом. Рассчитаем излучение точечного заряда, движущегося во внешнем переменном электромагнитном поле.

Пусть на заряд падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Заряд под ее действием приходит в ускоренное движение и излучает вторичную волну. Этот процесс называют *рассеянием* электромагнитных волн. На материальную точку с зарядом q электромагнитная волна действует с силой Лоренца. Магнитная составляющая силы Лоренца при нерелятивистских скоростях движения исчезающе мала по сравнению с электрической и может быть опущена. Для силы Лоренца ниже используется выражение.

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{11.6}$$

(Экспоненциальная форма удобна в вычислениях. При вещественном $\vec{E}_0$ для перехода к тригонометрической форме в окончательном результате нужно взять действительную часть: $\mathrm{Re}\, e^{i\omega t} = \cos \omega t$.) Предполагая, что длины волн велики по сравнению с областью движения заряда, имеем $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1$ и

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{11.7}$$

Найдем теперь условие, при котором сила радиационного трения оказывается малой по сравнению с внешней периодической силой. Если

$$|\vec{F}| \gg \frac{2fq^2}{3c} |\dot{\vec{a}}|,$$

то $m\vec{a} \approx \vec{F}$ и

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2}{3c} \frac{|\dot{\vec{F}}|}{m},$$

или

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2\omega}{3mc} qE_0,$$

откуда

$$\frac{2fq^2\omega}{3mc} \ll 1.$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, получим условие малости силы радиационного трения в виде

$$\lambda \gg \frac{fq^2}{m}. \tag{11.8}$$

Неравенство (11.8) можно использовать для оценки применимости макроскопической электродинамики к процессам рассеяния света веществом. Рассеяние происходит на электронах. Для них

$$r_0 = \frac{fe^2}{m} \simeq 2{,}8 \cdot 10^{-15} \text{ м} \tag{11.9}$$

так называемый классический радиус электрона. Таким образом, взаимодействие электромагнитного поля с электронами правильно описывается макроскопической электродинамикой до тех пор, пока длина волны значительно превышает классический радиус электрона. (Но уже на расстоянии порядка 10^{-10} м для описания движения этой частицы нужно использовать квантовую механику.)

Дальнейшие вычисления произведем для электрона, так как именно эта задача имеет очень важное практическое значение. Предположим, что при анализе движения радиационным трением можно пренебречь (т. е. «отдача» излучения мала). Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{11.10}$$

Отсюда найдем вторую производную дипольного момента, входящую во все формулы излучения в дипольном электрическом приближении:

$$\ddot{\vec{p}} = -e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{11.11}$$

Пользуясь далее формулами (10.11), (10,12), имеем

$$\vec{E} = \frac{r_0}{r}[[\vec{E}_0\vec{n}]\vec{n}]e^{i\omega\tau}, \quad \vec{B} = \frac{r_0}{cr}[\vec{E}_0\vec{n}]e^{i\omega\tau}, \tag{11.12}$$

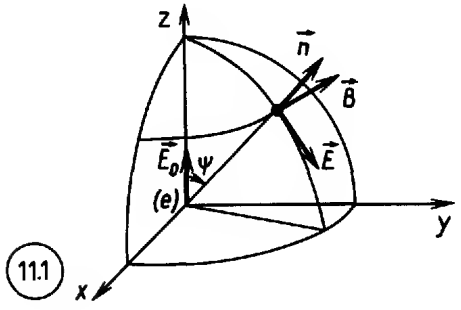
где r_0 – классический радиус электрона (11.9). На рисунке 11.1 показано направление вектора напряженности падающей волны и векторов поля рассеянной волны. Угол между $\vec{E}_0$ и направлением на точку наблюдения обозначим ψ.

Вычислим плотность потока энергии излучения по формуле (10.14):

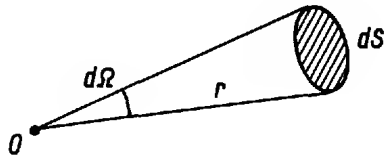
$$\sigma = \frac{r_0^2 c}{r^2 c^2 \mu_0}(E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2\psi = \frac{c\,\varepsilon_0 r_0^2}{r^2}(E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2\psi. \tag{11.13}$$

Выделяя в формуле (11.13) вещественную часть и усредняя поток за период, имеем

$$\bar{\sigma} = \frac{c\varepsilon_0 r_0^2}{2}\,\frac{E_0^2 \sin^2\psi}{r^2}. \tag{11.14}$$



11.1



11.2

Введем важные характеристики рассеяния: *интенсивность излучения* при рассеянии и *сечение рассеяния.*

Под *интенсивностью* излучения понимают поток энергии, приходящийся на телесный угол $d\Omega$. Он проходит через площадку dS на поверхности сферы радиусом r (рис. 11.2). Ясно, что $dS = r^2 d\Omega$ и

$$dN = \vec{\sigma} d\vec{S} = \frac{c\varepsilon_0 r_0^2}{2} E_0^2 \sin^2\psi d\Omega. \qquad (11.15)$$

Вычислим среднюю плотность потока энергии в падающей волне. Знаем, что

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя это значение напряженности в формулу для потока (9.12) и усредняя по времени, получим

$$\sigma_{\text{пад}} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}. \qquad (11.16)$$

Теперь можно найти отношение интенсивности рассеянной волны в направлении ψ к плотности потока падающей волны:

$$d\sum = \frac{dN}{\sigma_{\text{пад}}} = r_0^2 \sin^2\psi \, d\Omega. \qquad (11.17)$$

Эта величина имеет размерность площади и пропорциональна квадрату классического радиуса электрона. Она носит название *дифференциального сечения рассеяния* электромагнитных волн на электроне.

Сечение рассеяния (11.17) получено для поляризованного излучения. Чтобы перейти к неполяризованному, результат следует усреднить по всевозможным ориентациям вектора $\vec{E}_0$. Пусть падающая волна движется вдоль Oz, а вектор $\vec{E}_0$ направлен по Ox (рис. 11.3). Установим связь между углами ψ и ϑ, для чего спроецируем вектор $\vec{n}$ на ось Ox:

$$\cos\psi = \sin\vartheta \cos\alpha.$$

Как следствие,

$$\sin^2\psi = 1 - \sin^2\vartheta \cos^2\alpha.$$

Если вращать вектор $\vec{E}_0$ в плоскости Oxy, то изменяется угол α, а вместе с ним – и угол ψ. Различные ориентации вектора напряженности соответствуют той или иной поляризации падающей волны. Усредняя сечение рассеяния по α, находим:

$$\overline{d\sum} = r_0^2 d\,\Omega\,\overline{\sin^2\psi} = r_0^2\, d\,\Omega\,(1 - \sin^2\vartheta\,\overline{\cos^2\alpha}).$$

Так как

$$\overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2},$$

а

$$1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2},$$

то

$$\overline{d\sum} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2} d\Omega.$$

Из данной формулы следует, что имеются два направления, по которым сечение рассеяния максимально: это направление движения падающей волны и обратное ему направление.

Введем также *интегральное или полное сечение рассеяния* определением

$$\sum = \int d\sum.$$

Для неполяризованного излучения

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int (1 + \cos^2\vartheta)\, d\Omega,$$

что дает при вычислении выражение:

$$\sum = \frac{r_0^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} (1 + \cos^2\vartheta)\cdot \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Применяемое в теории и на практике *полное сечение рассеяния* равно отношению мощности рассеянного излучения к плотности потока энергии падающей волны:

$$\sum = \frac{\bar{N}}{\sigma_{\text{пад}}}. \tag{11.18}$$

Подставляя сюда значения σ и $\bar{N}$ по формулам (11.1), (11.11) и (11.16), получаем для электрона

$$\sum = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \tag{11.19}$$

что совпадает с выведенной выше формулой.

Полное сечение имеет наглядную геометрическую интерпретацию: из падающего потока энергии рассеивается та часть, которая попадает на площадку $\sum$. (Соответственно для электрона классический радиус r_0 по порядку величины оказывается радиусом этой круговой площадки.)

Формула (11.19) известна в оптике под названием формулы Томсона. Она имеет фундаментальное значение для рассеяния электромагнитных волн свободными или слабосвязанными зарядами вещества. Ее можно использовать и при высоких частотах падающих волн, она применима вплоть до волн длиной в 10^{-10} м.

Методические указания и рекомендации

I. Изучение свободного электромагнитного поля как самостоятельного физического объекта существенно в методологическом плане. В методическом же отношении – это продолжение решения волновых уравнений, начатого ранее в главе I. Теперь анализируются векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, рассчитываемые с помощью волновых потенциалов.

В вопросах излучения электромагнитных волн избран единый для всего курса путь – решение с помощью найденных в главе I запаздывающих потенциалов. В принципиальном плане дипольное электрическое излучение исчерпывает существо явления. Для практики существенно и магнитное излучение, которое кратко рассмотрено. Следует заметить, что материал по излучению электромагнитных волн относится к наиболее трудному для усвоения и требует тщательной проработки под руководством преподавателя.

Вопросы о рассеянии электромагнитных волн могут изучаться

в ознакомительном плане, однако качественная сторона дела существенно важна для учителя.

II. По мере изучения данной главы необходимо выполнять задания и контролировать свои знания следующими вопросами:

§ 9. Составьте систему уравнений, описывающих свободное поле. Обдумайте характер связи между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$, «механизм» распространения волны. Укажите особенности плоской волны, монохроматической. Запишите разложение произвольной плоской волны на гармоники. Что должно быть задано, чтобы разложение выражало конкретную волну? Разберите содержание примера 9.1. Что такое волновой пакет? Каково соотношение между реальными волнами и их моделями: пакетом, гармоникой? Оцените значение соотношения (9.19) для практики передачи информации с помощью электромагнитных волн. Обсудите вопросы поляризации волн в связи с общим решением волнового уравнения.

§ 10. Продумайте приближения, применяемые при выводе формул для излучения системы. Как связаны электромагнитные волны с зарядами? Проанализируйте поле излучения диполя. Обсудите роль зависимости интенсивности излучения от частоты. При каком движении точечный заряд излучает? От чего зависит спектральный состав излучения некоторой системы зарядов? Решите задачи 1–5 к данной главе.

§ 11. Поясните природу рассеяния электромагнитных волн веществом. В связи с этим поясните также явления отражения и преломления света. Подробно разберитесь в понятии сечения рассеяния. Как можно интерпретировать полное сечение рассеяния геометрически? Решите задачу 6 из упражнений.

Упражнения

1. Найти средние по времени значения параметров излучения гармонического осциллятора (см. пример 10.2). Усреднение производится с помощью формулы

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

где T – период колебания.

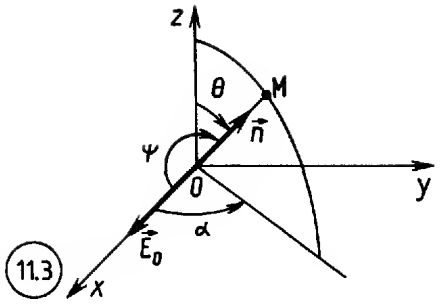
Ответ: $\bar{E} = \dfrac{fp_0 \sin\vartheta\,\omega^2}{\sqrt{2}r}$, $\quad \bar{B} = \dfrac{fp_0 \sin\vartheta\,\omega^2}{\sqrt{2}cr}$,

$$\bar{\sigma} = \frac{fp_0^2\omega^4 \sin^2\vartheta}{8\pi c r^2}, \quad \bar{N} = \frac{fp_0^2\omega^4}{3c}.$$

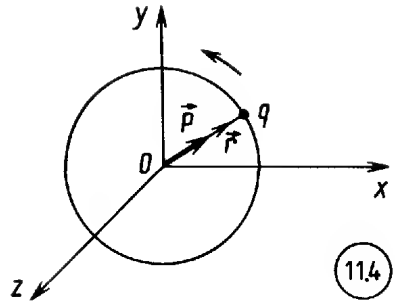
2. Проанализировать излучение точечного макроскопического заряда с заданным движением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в дипольном приближении при нерелятивистских скоростях.

Для участка траектории, малого по сравнению с расстоянием до точки наблюдения (см. рис. 10.3), возможно введение дипольного электрического момента заряда

$$\vec{p} = q\vec{r}(t).$$



11.3



11.4

В таком случае можно воспользоваться формулами (10.11), (10.12), (10.14), (10.15):

$$\vec{B} = \frac{fq}{cr}\left[\vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot\vec{n}\right],$$

$$\vec{E} = \frac{f}{r}\left[\left[\vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{n}\right]\cdot\vec{n}\right],$$

где $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ — ускорение заряда. Получаем

$$\sigma = \frac{fqa^2}{4\pi c r^2}\sin^2\vartheta;$$

полная мощность излучения равна: $N = \frac{2fq^2a^2}{3c}$.

3. Определить мощность излучения заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

Как показано в [1], ч. II, заряд движется по окружности, причем при нерелятивистских скоростях выполняется соотношение

$$\frac{mv^2}{r} = qvB.$$

Ускорение постоянно по величине и равно a:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}.$$

Используя результат предыдущей задачи, имеем $N = \frac{2fq^4v^2B^2}{3cm^2}$.

Излучение более интенсивно для легких частиц, что приводит к невозможности разгона электронов до очень высоких скоростей в циклических условиях: сообщаемая разгоняющим полем электрону энергия при некоторой его скорости вся идет на излучение. Однако само это так называемое циклотронное излучение находит применение на практике.

4. Рассчитать излучение электрического ротатора (заряд q, обращающий с частотой ω по окружности радиусом b) на большом расстоянии от ротатора (рис. 11.4).

Радиус-вектор заряда изменяется по закону

$$\vec{r} = \vec{i}b\cos\omega t + \vec{j}b\sin\omega t,$$

соответственно дипольный момент системы — по закону

$$\vec{p} = \vec{i}bq\cos\omega t + \vec{j}bq\sin\omega t.$$

Система сводится к двум скрещенным осцилляторам, а поле находится как суперпозиция их полей. Для волны, идущей от первого осциллятора по оси Oz, имеем

$$\vec{B}_1 = -[\vec{i}\,\vec{k}]\frac{1}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \vec{j}\frac{1}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

$$\vec{E}_1 = [\vec{j}\,\vec{k}]\frac{c}{z}B_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \vec{i}\frac{1}{z}E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

где

$$B_0 = \frac{fqb\omega^2}{c},\quad E_0 = fqb\omega^2.$$

Соответственно для второго осциллятора

$$\vec{B}_2 = -\vec{i}\frac{1}{z}B_0\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),\quad \vec{E}_2 = \vec{j}\frac{E_0}{z}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

5. Показать, что излучение ротатора в направлении оси Oz поляризовано по кругу.

Составляющие поля по осям Ox и Oy сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$E_x = \frac{1}{z}E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

$$E_y = \frac{1}{z}E_0\sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

что и дает круговую поляризацию.

6. Пучок электромагнитных волн с сечением $A = 10^{-6}$ м^2 и плотностью потока энергии $\sigma_{\text{пад}} = 10\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ падает на слой электронного газа толщиной $d = 10^{-6}$ м, в котором концентрация электронов составляет $n = 10^{12}\,\frac{1}{\text{м}^3}$. Определить рассеиваемую мощность.

Решение: Для отдельного электрона

$$\sum_0 = \frac{N_0}{\sigma_{\text{пад}}},\ \text{где}\ \sum_0 = \frac{8\pi}{3}r_0^2$$

и

$$r_0 = 2{,}8\cdot 10^{-15}\ \text{м}.$$

Остается просуммировать поток энергии от всех электронов:

$$N = N_0 A dn = 6{,}7 \cdot 10^{-24} \text{ Вт.}$$

Глава IV
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Электромагнитное поле по своей природе является предельно релятивистским объектом: оно распространяется в пространстве со скоростью света. Уравнения поля ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. сохраняют одну и ту же форму написания во всех инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство не является очевидным, ибо уравнения Максвелла обычно используются в трехмерной форме, тогда как для ковариантной записи им следует придать четырехмерную форму.

Вышеизложенный материал не требовал анализа релятивистских особенностей уравнений поля, релятивистской природы законов электромагнетизма. Однако эти вопросы имеют принципиальное значение, и для них отводится специальная тема курса. При изучении данной темы требуется знание основ СТО; соответствующий материал изложен в главе I части II курса теоретической физики (см. [1]).

§ 12. Релятивистская ковариантность уравнений электродинамики

12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда. Основные уравнения электромагнитного поля, их решения и следствия справедливы в инерциальных системах отсчета. Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к преобразованиям Лоренца. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \ \alpha, \ \beta = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \tag{12.1}$$

где $\Lambda_{\alpha\beta}$ – элементы матрицы преобразований Лоренца:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12.2)$$

В формуле (12.1) обозначения x'_α, x_β соответствуют радиус-векторам точек четырехмерного пространства с координатами

$$x_0 = ict,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$$

т. е.

$$x_\alpha = (ict,\ x,\ y,\ z).$$

Может быть использована более короткая запись с выделением временной и пространственной частей 4-вектора:

$$x_\alpha = (ict,\ \vec{r}). \qquad (12.3)$$

В матрице преобразований Лоренца (12.2) V — модуль скорости движения одной системы в другой (при совпадении осей Ox и $O'x'$).

Ковариантность уравнений означает, что величины, характеризующие систему *электромагнитное поле-заряды*, должны быть или скалярами, или векторами, или тензорами преобразований Лоренца, преобразующимися при переходе от нештрихованной системы к штрихованной по закону:

для скаляра

$$f' = f, \qquad (12.4\text{-а})$$

для вектора

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta, \qquad (12.4\text{-б})$$

для тензора (второго ранга)

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}. \qquad (12.4\text{-в})$$

Формулы (12.4) применяются как для преобразования величин, не зависящих от координат точки пространства, таких, например, как скаляр c, 4-вектор v_α, так и для «полевых» величин, являющихся функциями координат точки 4-пространства x_α В последнем случае они требуют пояснений.

Пусть $f = f(x_\alpha)$, $A_\alpha = A_\alpha(x_\alpha)$, $F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x_\alpha)$. Вычислим значения этих функций для некоторой точки пространства-времени в разных ИСО. Если имеем дело со скаляром, то $f(x_\alpha) = f(x'_\alpha)$. Для векторов и тензоров такое равенство несправедливо: $A_\alpha(x_\alpha) \neq A'_\alpha(x'_\alpha)$, $F_{\alpha\beta}(x_\alpha) \neq F'_{\alpha\beta}(x'_\alpha)$. Но между всеми проекциями 4-вектора или элементами тензора существуют зависимости, отраженные формулами (12.4). Иными словами, в общем случае формулы (12.4) устанавливают связь между полевыми величинами в одной и той же (любой) точке пространства-времени в разных ИСО.

Левые и правые части ковариантных уравнений электромагнетизма должны иметь одинаковые трансформационные свойства либо скаляров, либо векторов, либо тензоров одного и того же ранга.

Перечисляя свойства электрического заряда в § 1, п. 1.1, мы указали, что он считается скаляром или инвариантом преобразований Лоренца, т. е.

$$Q' = Q. \tag{12.5}$$

Положение об инвариантности заряда в релятивистской электродинамике берется в качестве исходного принципа.

Из определения плотности заряда (1.2) следует, что эта величина не является скаляром преобразований Лоренца. В самом деле,

$$\varrho = \frac{dQ}{dV},$$

но объем при переходе от одной системы к другой изменяется, вместе с ним изменяется и ϱ. С учетом соотношения [1], ч. II (2.1)

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

имеем формулу преобразования плотности заряда

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12.6}$$

где ϱ_0 – плотность зарядов в системе, где они покоятся. Заметим, что по определению ϱ_0 есть скаляр преобразований Лоренца.

Три проекции вектора плотности тока $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$ не образуют 4-вектор, однако вместе с плотностью заряда из них 4-вектор можно получить. Построим заведомый 4-вектор, умножая скаляр ϱ_0 на 4-вектор:

$$j_\alpha = \varrho_0 v_\alpha, \tag{12.7}$$

где v_α – 4-вектор скорости движения зарядов (см. [1], ч. II, § 3, п. 3.2). Вспоминая выражения проекций 4-вектора скорости

$$v_\alpha = \left(\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right),$$

запишем формулы (12.7) в развернутом виде:

$$j_\alpha = \left(\frac{ic\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\varrho_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) = (ic\varrho, \vec{j}). \tag{12.8}$$

Пространственная часть 4-вектора (12.8) есть вектор плотности тока, поэтому j_α называют 4-вектором плотности тока.

Пример 12.1. **Преобразование 4-вектора плотности тока от одной ИСО к другой.**

Переход от одной инерциальной системы к другой совершается с помощью преобразований (12.4-б). Применим преобразования к вектору j_α. Пусть в нештрихованной системе заряды покоятся, т. е.

$$j_\alpha = (ic\varrho_0,\ 0).$$

В таком случае для штрихованной системы, движущейся в нештрихованной со скоростью $\vec{V}$ вдоль оси Ox, получаем

$$j'_\alpha = \left(\frac{ic\varrho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ \frac{-\varrho_0\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right).$$

В нерелятивистском приближении результат очевиден:

$$\varrho' = \varrho_0,\ \vec{j}' = -\varrho_0\vec{V}, \tag{12.9}$$

ток возникает вследствие движения зарядов в данной системе. Релятивистское же возрастание плотности заряда и тока связано с уменьшением размеров движущегося объема, занятого зарядами.

Запишем в четырехмерном виде уравнение непрерывности (1.6), являющееся выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

Используя обозначения координат точки 4-пространства (12.3), принятые в СТО, имеем

$$ic\frac{\partial\varrho}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда с помощью формулы (12.8) получим

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{12.10}$$

Уравнению непрерывности придана 4-мерная ковариантная форма. Она особенно наглядна при использовании 4-мерного оператора:

$$\nabla_\alpha = \left(\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right).$$

Если теперь записать формулу (12.10) в виде

$$\nabla_\alpha j_\alpha = 0, \tag{12.11}$$

то уравнение непрерывности (12.11) можно прочитать следующим образом: четырехмерная дивергенция 4-вектора плотности тока равна нулю.

Таким образом, полагая электрический заряд скаляром преобразований Лоренца, мы убедились в справедливости закона сохране-

ния заряда во всех инерциальных системах. Скалярный характер электрического заряда и закон сохранения этой величины оказались взаимосвязанными.

12.2. Ковариантность уравнений электромагнитного поля в потенциалах. Обратимся к потенциалам электромагнитного поля φ и $\vec{A}$ и формально объединим скалярный и векторный потенциалы поля в матрицу-столбец:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

Используем также 4-оператор Даламбера:

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

являющийся скаляром преобразований Лоренца.

Выпишем уравнения электромагнитного поля в потенциалах:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 j,$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho.$$

Нетрудно видеть, что с помощью введенной величины A_α и оператора $\Box$ они принимают вид

$$\Box A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha. \tag{12.13}$$

Справа в выражении (12.13) стоит вектор преобразований Лоренца j_α. Поэтому 4-вектором является и величина A_α, если μ_0 — скаляр преобразований. Инвариантность μ_0 и ε_0 вытекает из соотношения

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2},$$

где c — инвариантная скорость света. (Разумеется, единицы измерения выбраны во всех ИСО одинаковые.)

Итак, если потенциалы φ и $\vec{A}$ объединяются в 4-вектор потенциала электромагнитного поля, то уравнения (12.13) сохраняют форму во всех инерциальных системах отсчета, т. е. ковариантны.

Запишем также в ковариантной форме условие калибровки потенциалов (4.5). Оно принимает вид

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

или $$\nabla_\alpha A_\alpha = 0. \qquad (12.14)$$

Четырехмерная форма записи уравнений поля не только наглядно показывает ковариантность их по отношению к лоренцовым преобразованиям, но и дает общий метод преобразования величин, входящих в уравнения. Так, по формулам (12.4) преобразуются потенциалы поля, а от них можно перейти и к векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Однако мы выберем другой, математически более простой способ нахождения формул пересчета напряженности и индукции.

Пример 12.2 **Формулы преобразования потенциалов поля.**
Используя формулы 12.4 и определение 4-потенциала (12.12), имеем

$$A'_0 = \frac{A_0 - \imath \frac{V}{c} A_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A'_1 = \frac{A_1 + \imath \frac{V}{c} A_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3$$

Переходя к трехмерным величинам, получаем для скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi' = \frac{\varphi - V A_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c^2}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

§ 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой

13.1. Тензор электромагнитного поля. В предыдущем параграфе доказана лоренц-ковариантность уравнений поля в потенциалах. Это значит, что они справедливы в любой инерциальной системе отсчета и в трехмерной форме, применявшейся нами ранее. Разумеется, векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются при переходе от одной системы к другой. Пересчет их можно выполнить следующим способом. Рассмотрим величину, представляющую собой по определению антисимметричный тензор второго ранга:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \qquad (13.1)$$

Используя формулы $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$,

а также определение 4-радиус-вектора (12.3), нетрудно найти все элементы тензора:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.2}$$

Тензор $F_{\alpha\beta}$ называется тензором электромагнитного поля. В этой величине объединены электрические и магнитные характеристики поля, поэтому тензор дает полное описание поля.

С помощью тензора электромагнитного поля (13.2) уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) записываются в ковариантной форме. Читателю предлагается в качестве примера проверить следующие утверждения.

Первая пара уравнений Максвелла (2.1) эквивалентна одному тензорному уравнению

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{13.3}$$

причем все три индекса α, β, γ принимают только различные значения. (Если два или три индекса совпадают, то получается тождество $0 = 0$.)

Вторая пара уравнений (2.1) заменяется формулой

$$\sum_\beta \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mu_0 j_\alpha, \tag{13.4}$$

в которой индексы α и β принимают значения 0, 1, 2, 3.

Полученные результаты в виде формул (13.3) и (13.4) замечательны в следующих отношениях. Во-первых, описание поля с помощью одной тензорной характеристики подчеркивает единство его и условность подразделения поля на электрическое и магнитное. Во-вторых, ковариантность уравнений Максвелла наглядно показывает релятивистскую природу электромагнитных полей, основных законов электродинамики, релятивистский их характер. В-третьих, открывается простой путь для нахождения формул преобразования векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ из одной инерциальной системы в другую (средствами тензорного исчисления).

13.2. Преобразование векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инварианты поля. Проекции вектора электрической напряженности поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ связаны с компонентами тензора $F_{\alpha\beta}$ (см. (13.2)). Поэтому формулы

преобразования их при переходе из одной ИСО в другую могут быть найдены из общего правила преобразования тензорных величин (12.4-в):

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\delta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}.$$

Давая индексам нужные для получения проекций $\vec{E}$ и $\vec{B}$ согласно матрице (13.2) значения (например, $F_{1,2} = B_z$, $F_{0,1} = \frac{i}{c} E_x$ и т. д.) получаем

$$\begin{cases} E'_x = E_x, & B'_x = B_x; \\ E'_y = \dfrac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, & B'_y = \dfrac{B_y + \dfrac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}; \\ E'_z = \dfrac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, & B'_z = \dfrac{B_z - \dfrac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{13.5}$$

Формулы обратных преобразований можно получить обращением знака скорости V. Они часто удобнее формул (13.5) по той причине, что, связывая с движущимся телом (частицей) штрихованную систему, имеем в нештрихованной для нее скорость движения $\vec{V}$, а не $-\vec{V}$, как в случае (13.5). Выпишем формулы преобразования от штрихованной системы к нештрихованной:

$$\begin{cases} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = \dfrac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, & B_y = \dfrac{B'_y - \dfrac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}; \\ E_z = \dfrac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, & B_z = \dfrac{B'_z + \dfrac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{13.6}$$

Из соотношений (13.5) или (13.6) отчетливо виден относительный характер разделения поля на электрическое и магнитное.

Пример 13.1. **Преобразование электрического поля к другим системам отсчета.** Пусть в некоторой ИСО имеет место только электрическое поле $\vec{E}'$ ($\vec{B}' = 0$). В других системах имеются и электрическое, и магнитное поля:

$$E_x = E'_x, \qquad B_x = 0;$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad B_y = \frac{-\frac{V}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{V}{c^2}E_z;$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad B_z = \frac{\frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}E_y.$$

Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в этом случае выражается формулой

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,[\vec{V}\,\vec{E}].$$

Следовательно, магнитное поле перпендикулярно электрическому, а также направлению движения системы. Аналогично: если в штрихованной системе существует одно магнитное поле $\vec{B}'$, а $\vec{E}' = 0$, то в нештрихованной появляется и электрическое, причем

$$\vec{E} = -[\vec{V}\,\vec{B}].$$

Из примера видно, что проявление электрического или магнитного поля зависит от выбора системы отсчета.

В релятивистской физике особенно важное значение имеют не относительные, а абсолютные величины — инварианты (или скаляры) преобразований Лоренца.

Получим инвариантные для электромагнитного поля величины. По свойствам тензоров свертка тензора по обоим индексам есть скаляр преобразований Лоренца. Вычисление свертки тензора (13.2) дает

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2\left(B^2 - \frac{1}{c^2}E^2\right), \tag{13.7}$$

так что

$$B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = Inv^{(1)}.$$

Прямым применением формул (13.5) убеждаемся, что инвариантно и скалярное произведение векторов поля:

$$\vec{E}\,\vec{B} = Inv^{(2)}. \tag{13.8}$$

Инвариантные величины в каждой точке пространства не зависят от выбора ИСО. В ряде случаев их удобно использовать при пересчетах поля из одной системы в другую.

Пример 13.2. **Формулы преобразования векторов поля при нерелятивистских скоростях движения ($V \ll c$).**

Из формул (13.6) получаем

$$\begin{cases} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = E'_y + VB'_z, & B_y = B'_y - \dfrac{V}{c^2}E'_z \simeq B'_y; \\ E_z = E'_z - VB'_y, & B_z = B'_z + \dfrac{V}{c^2}E'_y \simeq B'_z. \end{cases} \tag{13.9}$$

Во втором столбце формул (13.6) пренебрегаем не только членом $\frac{V^2}{c^2}$, но и $\frac{V}{c^2}E'_z$ и $\frac{V}{c^2}E'_y$, что оправдано следующими условиями: действие поля на заряды задано силой Лоренца (1.8), а проекция ее магнитной составляющей на ось Oz (в нашем случае $q\frac{V^2}{c^2}E'_z$) пренебрежимо мала по сравнению с электрической составляющей (qE'_z), то же и для других проекций.

Из формул (13.9) видно, что относительный характер разделения поля на магнитное и электрическое имеет место и при нерелятивистских скоростях движения. Так, если в нештрихованной системе было только магнитное поле $\vec{B}$ ($\vec{E}=0$), то в штрихованной появляется и электрическое

$$\vec{E}' = [\vec{V}\,\vec{B}].$$

Пример 13.3. **Сила Лоренца в нерелятивистской области.**

Если точечный заряд q покоится в штрихованной системе, то на него действует сила

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q\,[\vec{V}\,\vec{B}].$$

(См. конец примера 13.2.) Так как в нерелятивистской области сила инвариантна (во всех инерциальных системах отсчета имеет одно и то же значение), то та же по величине сила действует на заряд и в нештрихованной системе, где он движется со скоростью $\vec{V}$ в магнитном поле:

$$\vec{F} = q\,[\vec{V}\,\vec{B}]. \tag{13.10}$$

Таким образом получен вывод для магнитной составляющей силы Лоренца на основе формул преобразования вектора поля. (Формула (13.10) остается справедливой и при релятивистских скоростях, но вывод требует применения преобразований Лоренца к векторам поля и силы.)

Пример 13.4. **Вывод преобразования силы Лоренца при переходе от одной ИСО к другой.**

Выражение (1.8)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}] \tag{1}$$

преобразуем к штрихованной системе, вводя соответствующие значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ по формулам (13.6) и заменяя $\vec{v}$ на $\vec{v}'$ с помощью формул преобразования скорости (см. [1], ч. II, § 2, п. 2.4):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}},\quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}},\quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}$$

Получаем для проекции силы на ось Ox

$$F_x = qE_x + q\,(v_y B_z - v_z B_y) = qE_x + q\,\frac{v'_y B'_z - v'_z B'_y + \frac{V}{c^2}E'_y v'_y + \frac{V}{c^2}E'_z v'_z}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} =$$

$$= \frac{qE'_x + q\,[\vec{v}'\vec{B}']_x + q\frac{V}{c^2}\vec{E}'\vec{v}'}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что если использовать для силы Лоренца во всех ИСО выражение (1), то F_x преобразуется в соответствии с равенством

$$F_x = \frac{F'_x + \vec{v}'\vec{F}'\dfrac{V}{c^2}}{1 + \dfrac{Vv'_x}{c^2}},$$

совпадающим с формулой преобразования проекции силы, выведенной в СТО (см. [1], ч. II, пример 6.1) То же относится и к двум другим проекциям силы:

$$F_y = \frac{F'_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_z = \frac{F'_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{Vv'_x}{c^2}}.$$

Таким образом доказано, что определение силы Лоренца ковариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. во всех ИСО справедлива формула (1).

Пример 13.5. **Ковариантная форма уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагиитном поле.**

В части II (см. [1], ч. II, § 6) обсуждалась ковариантная форма релятивистского уравнения динамики и было получено уравнение

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = f_\alpha, \tag{1}$$

где

$$p_\alpha = \left(\frac{imc}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) - \tag{2}$$

4-импульс, а f_α – 4-сила, связанная с трехмерной силой соотношением

$$f_\alpha = \left(\frac{i\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{3}$$

Подставляя в (1) значения p_α из (2) и вместо $\vec{F}$ силу Лоренца (1.8), действующую на точечный электрический заряд q, получим уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = q\vec{E}\vec{v},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]).$$

Это и есть ковариантные уравнения движения заряженной частицы в поле, т. е. сохраняющие свою форму во всех ИСО при условии, что векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ преобразуются с помощью формул (13.5).

Пример 13.6. **Лоренц-инвариантная функция Лагранжа.**

Обычный вид функции Лагранжа для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, известен (см [1], ч II, (4.2))·

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v}. \tag{1}$$

Это выражение сводится к инвариантному

$$\tilde{L} = -mc^2 + qA_\alpha v_\alpha, \tag{2}$$

откуда и следует ковариантность уравнений движения, получаемых по методу Лагранжа из выражения (1).

13.3. Эффект Доплера для электромагнитных волн. Явление изменения частоты волны в зависимости от скорости движения источника в системе наблюдателя составляет эффект Доплера для света. Поскольку электромагнитное поле является предельно релятивистским объектом, многие явления и эффекты, связанные с полем, имеют релятивистскую природу. Таковой обладает и названный эффект. Для его анализа применим преобразования Лоренца 4-векторов, инварианты, образованные из них.

Плоская электромагнитная волна в пустоте имеет инвариантную скорость распространения во всех инерциальных системах отсчета, равную c. Пользуясь другими инвариантами электромагнитного поля (13.7) и (13.8), легко устанавливаем, что перпендикулярность векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ и соотношение $E = cB$ для их модулей сохраняются в любой системе отсчета. Однофазность колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во всех ИСО свидетельствует о том, что фаза колебаний $\Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$ есть скаляр преобразований Лоренца, а входящие в нее волновой вектор $\vec{k}$ и частота колебаний ω преобразуются при переходе от одной системы к другой.

Изменение частоты представляет собой эффект Доплера, а изменение направления волнового вектора $\vec{k}$ — аберрацию света. Очевидно, что в силу равноправия систем эффекты одинаковы при движении источника и приемника, т. е. определяются их относительной скоростью.

Выведем теперь зависимость ω от скорости движения источника света. Для этого выберем две системы, у которых оси Ox и $O'x'$ параллельны этой скорости $\vec{V}$. В штрихованной системе источник покоится. На рисунке 13.1 $\vec{k}$ — волновой вектор в нештрихованной системе, где источник движется со скоростью $\vec{V}$; ϑ — угол, под которым свет приходит к наблюдателю в системе координат Oxy. Аналогично $\vec{k}'$ и ϑ' — величины, измеряемые наблюдателем в штрихованной системе $O'x'y'$.

Заметим, что скаляр Φ можно представить как произведение двух 4-векторов:

$$\Phi = k_\alpha x_\alpha,$$

где $k_\alpha = \left(\frac{i\omega}{c}, \vec{k}\right)$

Пользуясь формулой (12.4-б) для преобразования 4-вектора

$$k'_\alpha = \sum_\beta \Lambda_{\alpha\beta} k_\beta$$

и матрицей преобразований Лоренца (12.1), имеем для временной составляющей волнового вектора выражение

$$k'_0 = \frac{k_0 - \frac{iV}{c} k_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (13.11)$$

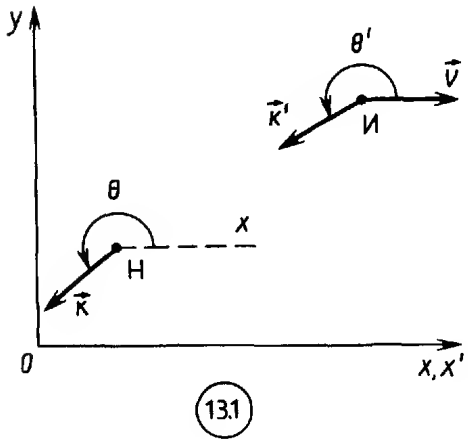
Из рисунка видно, что $k_1 = k_x = k \cos \vartheta$. Формула (13.11), если в нее подставить $k_0 = \frac{\imath\omega}{c}$, $k'_0 = \frac{\imath\omega'}{c}$, дает правило преобразования частоты:

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

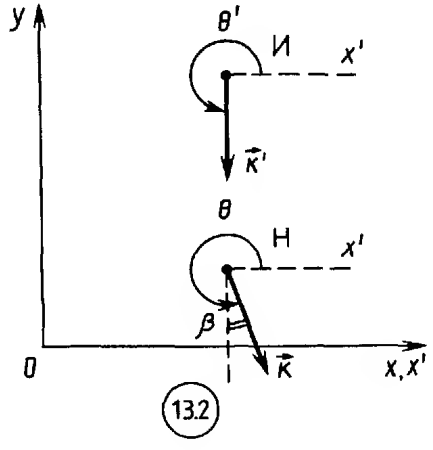
Обозначим через ω_0 частоту света в системе, где источник покоится, и назовем ее собственной частотой. Частота, измеренная в системе отсчета, где источник движется, выражается через собственную частоту следующим образом:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \qquad (13.12)$$

Согласно сделанным ранее разъяснениям формула (13.12) применима и в случае движения источника, и в случае движения наблю-



13.1



13.2

дателя, тогда как для упругих волн, например волн в среде, имеют место разные формулы: если движется источник, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta},$$

если движется наблюдатель, то

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{V}{c}\cos\vartheta\right).$$

Последние две формулы отличаются друг от друга членами второго порядка малости относительно величины $\frac{V}{c}$. В принципе эффект Доплера мог бы играть роль, аналогичную опыту Майкельсона: изменение частоты при движении источника и наблюдателя в соответствии с формулой (13.12) служит доказательством отсутствия светоносной среды и равноправия инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим важные частные случаи проявления эффекта Доплера:

а) $\vartheta = 180°$, источник удаляется от наблюдателя. В таком случае

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}},$$

и $\omega < \omega_0$. Наблюдается, например, уменьшение частот известных линий излучения в спектрах далеких галактик. Это явление носит название «красного смещения» и интерпретируется как «разбегание» галактик, увеличение расстояний между ними. Красное смещение позволяет определить исходя из этих предположений радиальную составляющую скорости движения галактик (по отношению к Земле).

б) $\vartheta = 0$, источник приближается к наблюдателю. Частота увеличивается по формуле

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}.$$

в) Случай $\vartheta = 90°$ соответствует «поперечному» эффекту Доплера:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поперечный эффект Доплера может послужить прямым подтверждением замедления хода процессов на движущихся телах. В нерелятивистской физике его нет. В 1938 г. Айвсом были поставлены специальные опыты с каналовыми лучами, подтвердившие с высокой точностью этот релятивистский эффект.

Заметим, что с помощью эффекта Мессбауера в ядерной физике

фиксируется изменение частот γ-лучей, обусловленное движениями со скоростями всего несколько см/с, что позволяет зафиксировать эффект Доплера, вызванный весьма медленным движением источника.

Пример 13.7. **Аберрация света.**

Явление аберрации или изменения направления света, вызванное относительным движением источника и приемника света, можно рассмотреть как следствие преобразований Лоренца.

Напомним, что исходя из классической формулы сложения скоростей при направлении распространения света, перпендикулярном к направлению движения, имеем для угла аберрации β (рис. 13.2)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{c}. \tag{1}$$

Понятно, что эта формула является приближенной и может использоваться лишь при $v \ll c$.

Для вывода релятивистской формулы аберрации получим связь углов ϑ и ϑ'. Для этого выпишем формулу преобразования компоненты k_1

$$k_1' = \frac{k_1 + \frac{iV}{c} k_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{2}$$

откуда следует

$$k' \cos\vartheta' = \frac{k\cos\vartheta - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Вспоминая, что $\omega = ck$, имеем

$$\omega' \cos\vartheta' = \frac{\omega\left(\cos\vartheta - \frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Теперь подставим сюда значение частоты из формулы эффекта Доплера:

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta}. \tag{3}$$

Используя преобразование для компоненты k_2', аналогично получим

$$\sin\vartheta' = \frac{\sin\vartheta\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta}. \tag{4}$$

Однако нас интересует зависимость измеряемого угла ϑ в системе, где источник света движется, от угла ϑ'. Обратные формулы получим обращением знака скорости в формулах (3) и (4). Деля затем (4) почленно на (3), имеем

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{\cos\vartheta' + \dfrac{V}{c}} \tag{5}$$

Общая формула (5) для аберрации света найдена

Пусть свет испускается перпендикулярно направлению движения, т е $\vartheta' = 270°$ (см рис 13 2), тогда

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{c}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{6}$$

Из рисунка видно, что $-\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{ctg}\beta$, т е

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{7}$$

Это и есть релятивистская формула аберрации, соответствующая рассмотренной в начале примера классической формуле (1)

В общем случае произвольного угла ϑ' аберрация определяется разностью углов ϑ и ϑ'

Методические указания и рекомендации

I. Важная в мировоззренческом плане тема изложена в главе с помощью аппарата тензорного исчисления в пространстве Минковского. При этом применен наиболее простой вариант для выражения метрики: использована мнимая единица у временной проекции векторов. Основа главы — преобразования поля при переходе от одной системы к другой. Все остальное имеет иллюстративный характер.

По данной главе может быть организована самостоятельная работа. Это в основном примение формулы преобразования 4-векторов, использование инвариантов в конкретных задачах.

II. При изучении главы контролируйте усвоение материала с помощью вопросов, углубляйте понимание его в упражнениях.

§ 12. Повторите основы СТО по книге [1], ч. II. На чем основана четырехмерная интерпретация преобразований Лоренца? В чем отличие пространства-времени от евклидового пространства? Какие величины являются инвариантами при переходе от одной ИСО к другой? Приведите примеры 4-векторов из релятивистской динамики. Продумайте, что означает инвариантность электрического заряда. Докажите инвариантность 4-оператора Даламбера, векторный характер ∇_a. Докажите, что четыре величины $\frac{i}{c}\varphi$, A_x, A_y, A_z образуют 4-вектор. Исходя из формул (12.4) найдите формулы преобразования плотностей заряда и тока. Выведите формулы преобразований потенциалов поля. Почему скалярный и векторный потенциалы объединяются в одну величину? Повторите определение и свойства тензорных величин. Докажите, что совокупность величин (13.1)

образует тензор преобразований Лоренца. Разбейте все величины, встречающиеся в § 12 и § 13, на скаляры, векторы, тензоры. Решите задачи 1–12 из упражнений к главе. Перечислите известные вам применения эффекта Доплера. Обсудите применение явления аберрации света в астрономии.

Упражнения

1. Пользуясь определениями тензора поля (13.1), 4-потенциала A_α (12.12) и формулами $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, получить все элементы тензора $F_{\alpha\beta}$.

2. Вывести закон преобразования проекций вектров $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с помощью формул (12.4) и (13.2).

3. Доказать эквивалентность ковариантной системы уравнений (13.3), (13.4) и системы уравнений Максвелла (2.1), используя компоненты тензора поля, заданные через проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и выполняя указанные в уравнениях действия.

4. Пользуясь инвариантами поля (13.7), (13.8), доказать, что перпендикулярность векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и отношение их модулей в электромагнитной волне сохраняются во всех ИСО.

5. Показать с помощью инвариантов $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$, что перпендикулярность векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ сохраняется во всех ИСО только при условии сохранения определенного отношения их модулей.

6. Показать, что во всех ИСО имеется постоянное отношение $|\vec{E}|$ и $|\vec{B}|$ только при условии перпендикулярности векторов.

7. Выполнить непосредственную проверку инвариантности величин $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$ с помощью преобразований Лоренца.

8. Найти закон преобразования векторов поля при $V \ll c$ и записать его в векторной форме.

Ответ: $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}\vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B}$.

9. С помощью результата предыдущей задачи показать, что для случая $E = 0$, а $B \neq 0$ векторы $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ перпендикулярны.

10. Показать, что в случае $Inv^{(2)} > 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ найдется система отсчета, в которой имеет место только магнитное поле, а при $Inv^{(2)} < 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ – только электрическое.

11. Как должны соотноситься между собой векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, чтобы электрическое или магнитное поле нельзя было исключить никаким выбором системы отсчета?

12. Точечный заряд движется равномерно со скоростью $\vec{v}$. Найти потенциалы и векторы поля при $v \ll c$.

Ответ: $\varphi(\vec{r}) = k\frac{q}{R}$, $\vec{A} = f\frac{q\vec{v}}{R}$, $\vec{E} = kq\frac{\vec{R}}{R^3}$, $\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\vec{E}]$,

где $\vec{R}$ – вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку, где измеряются характеристики поля: $R = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ПРОЦЕССЫ В ВЕЩЕСТВЕ

Глава V
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В этой части курса мы переходим к изучению электромагнитного поля в пространстве, заполненном веществом, т. е. поля в веществе или вещественной среде. Именно с полями в веществе чаще всего и приходится иметь дело на практике. (Изучение же поля в вакууме позволяло сосредоточить внимание на фундаментальных сторонах связей между полем и зарядами.)

Классическая электродинамика учитывает электрические и магнитные свойства вещества феноменологически посредством параметров: ε – диэлектрической проницаемости вещества и μ – магнитной проницаемости.

Кроме векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, для описания поля в веществе используются векторы: $\vec{D}$ – индукция электрического и $\vec{H}$ – напряженность магнитного полей.

В нашем курсе основные уравнения поля в веществе вводятся с помощью анализа роли зарядов, входящих в состав вещества. Этот подход в некоторой степени проясняет природу величин $\vec{D}$ и $\vec{H}$, их связь с другими характеристиками поля и вещества.

§ 14. Усреднение уравнений микроскопического поля в веществе

14.1. Свободные и связанные заряды. В предыдущих темах изучалось электромагнитное поле электрических зарядов в вакууме. Сами заряды входили в уравнения через функции $\varrho(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Обсуждалось лишь одно свойство носителей электрических зарядов – создавать электромагнитное поле, а их связь с веществом не рассматривалась; заряды считались некоей подвижной субстанцией, принимающей различные стационарные или изменяющиеся конфигурации в пространстве.

Но электрический заряд – это не особая субстанция, а свойство элементарных частиц, и существует заряд только вместе с элементарной частицей. Так что заряд всегда связан с веществом. Одни из заряженных частиц входят в состав атомов, молекул или расположены в узлах кристаллической решетки твердых тел и поэтому неспособны к свободному перемещению. Заряды таких частиц называются *связанными*. Другие частицы утеряли связь с атомами и могут перемещаться в пределах конкретной вещественной среды. Это, например, электроны внутри проводника или в вакууме. Аналогично обстоит

дело с положительными или отрицательными ионами в жидкости, газе, вакууме. Заряды таких частиц называются *свободными*.

Вещественная среда, в состав которой входят только связанные заряды (ядра и электроны), называется *диэлектриком*. Диэлектрик, если на нем не помещены внешние посторонние заряды,— электронейтральная система: число положительных связанных зарядов равно числу отрицательных. Если на твердый диэлектрик поместить свободный заряд, то последний сохраняет на нем свое положение неопределенно долго, т. е. распределение (конфигурация) свободного заряда на диэлектрике сохраняется. (Здесь заряд называется свободным в смысле утери связи с породившим его электронейтральным телом.)

В состав проводящих тел и сред *(проводников)* входят свободные заряды, т. е. при электронейтральности проводника в нем есть заряды, способные свободно перемещаться. Воздействие внешних полей создает в проводниках *направленное движение зарядов — электрический ток*. Если изолированный проводник заряжен, т. е. на него помещены извне свободные заряды, то последние распределяются по поверхности проводника.

Какие же заряды мы имели в виду, когда изучали электромагнитное поле в вакууме? Прежде всего мы имели дело со свободными зарядами, т. е. с зарядами, утратившими связь с веществом. Они располагались либо в вакууме (элементарные носители двигались в пустоте), либо на телах, но влиянием тел на поле, которое создано свободными зарядами, можно было пренебречь. О таких телах лишь говорилось, что именно они создают ту или иную конфигурацию зарядов. Например, при расчете поля заряженного тела из диэлектрика на больших расстояниях от него полем электронейтральной системы зарядов самого диэлектрика можно пренебречь. Аналогично можно пренебрегать собственным полем линейного проводника, по которому идет ток, и рассматривать только магнитное поле тока в окружающем пространстве.

Разумеется, указанный подход пригоден не всегда, и сейчас мы от него откажемся. Учтем, что в наблюдаемые электромагнитные поля вносят вклад не только свободные заряды, утратившие связь с веществом, но и заряды, входящие в его структуру. В оставшейся части курса электродинамики объект исследования есть *система, состоящая из свободных внешних по отношению к веществу зарядов, вещества, полностью или частично заполняющего пространство, и электромагнитного поля, созданного как внешними зарядами, так и зарядами, входящими в состав вещества*. (Внутренние заряды могут быть и связанными, и свободными. Далее выяснится, что подразделение свободных зарядов на внешние и входящие в состав вещества во многих случаях не нужно.) Основная задача электродинамики остается прежней — нахождение поля по заданному распределению и движению свободных зарядов, но теперь с учетом влияния на поле вещества.

Связанные заряды имеют дискретный характер; микрополя, ими созданные, весьма сильно изменяются при переходе от одной точки тела к другой и весьма быстро изменяются во времени. Вследствие квантовых эффектов уравнения Максвелла – Лоренца неприменимы для описания движения микрочастиц и расчета полей в масштабах отдельного атома или элементарной кристаллической ячейки. Но это сейчас и не требуется. Рассматривая поле, созданное микрозарядами в веществе, в макроскопическом плане следует усреднить микрополя по пространству и времени. Фактически также обстояло дело и с электромагнитным полем системы свободных зарядов в вакууме: для макроскопических проявлений не принимался в расчет дискретный характер зарядов и поля; определялись параметры некоторого усредненного макрополя $\vec{E}$ и $\vec{B}$, связанного с усредненной (по физически малому объему dV и промежутку времени dt) плотностью зарядов и токов, ϱ и $\vec{j}$.

Итак, в электродинамике для расчета поля в веществе подразделяют заряды на свободные и связанные. Те и другие считают непрерывно распределенными по пространству. Поле в веществе складывается из усредненных микрополей свободных и связанных зарядов. Подчеркнем условный характер термина «связанные заряды»: они ничем не отличаются от свободных, кроме того обстоятельства, что связанные заряды входят в состав атомов и молекул вещества, а свободные утратили связь с конкретным ядром. Важен следующий момент: свободные заряды могут быть для рассматриваемого тела как внешними, принесенными извне, так и внутренними, входящими в состав проводника. Связанные же заряды всегда внутренние. Так, если на диэлектрике помещен дополнительный заряд извне, то он свободен, хотя и не может в силу строения диэлектрика перемещаться.

14.2. Усредненные уравнения поля для системы свободных и связанных зарядов. Перед нами стоит задача определения векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в веществе по заданному распределению свободных токов и зарядов.

Рассмотрим с качественной стороны «механизм» образования поля в веществе. Окружающие нас тела и материальные среды в стабильном состоянии электронейтральны, а составляющие их заряды расположены таким образом, что не создают макроскопического поля. Иными словами, если нет внешних полей, то при усреднении распределения микрозарядов и микрополей мы получаем нулевые значения соответствующих величин: в диэлектриках $\varrho_{\text{св. з}} = 0$ и $\vec{j}_{\text{св. з}} = 0$, в проводниках равен нулю ток свободных зарядов $\vec{j} = 0$, а общая плотность распределения свободных и связанных зарядов также равна нулю. Соответственно отсутствует макроскопическое поле, созданное зарядами вещества.

Теперь допустим существование внешних свободных зарядов ϱ, $\vec{j}$. Они создают макроскопическое электромагнитное поле, под дей-

ствием которого перераспределяются заряды, входящие в вещество. В проводниках появляется макроскопический ток свободных зарядов, плотность зарядов в отдельных местах будет отлична от нуля. В диэлектриках за счет смещения связанных зарядов возникают отличные от нуля плотности связанных зарядов и токов. Вследствие этих изменений в состоянии вещества возникает дополнительное поле, накладывающееся на поле, созданное внешними свободными зарядами.

С помощью принципа суперпозиции (§ 2, п. 2.4) можно записать систему уравнений Максвелла (2.1) для электромагнитного поля, созданного совместными действиями свободных и связанных зарядов:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}_{\text{св. з}}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0} + \dfrac{\varrho_{\text{св. з}}}{\varepsilon_0}. \end{cases} \tag{14.1}$$

В классической электродинамике рассматриваются только такие случаи взаимодействия зарядов и поля, при которых вещество остается в стабильном состоянии, не разрушаясь при действии на него поля. Это значит, что отдельно сохраняются и свободные, и связанные заряды:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{j}_{\text{св. з}} + \dfrac{\partial \varrho_{\text{св з}}}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{14.2}$$

По существу, усреднению при написании уравнений (14.1) и (14.2) подвергалось действие не только связанных, но и свободных зарядов: ведь дискретны те и другие и фиксируются при измерениях не микрополя, созданные отдельными микрозарядами, а их макроскопическое усредненное поле ($\vec{E}$ и $\vec{B}$) как в случае вошедших в рассмотрение связанных, так и ранее рассматривавшихся свободных зарядов. Однако практически использовать уравнения (14.1), как это делалось в электродинамике вакуума с уравнениями Максвелла (2.1), нельзя, так как величины $\varrho_{\text{св. з}}$ и $\vec{j}_{\text{св. з}}$ не могут быть непосредственно измерены или вычислены. Чтобы использовать систему уравнений (14.1), необходимо учесть вклад зарядов вещества в общее поле, опираясь на некоторые измеримые параметры, и исключить из уравнений величины $\varrho_{\text{св. з}}$ и $\vec{j}_{\text{св з}}$. А это невозможно без введения каких-то моделей строения вещества, его электромагнитных характеристик для описания поведения вещества в электромагнитном поле, т. е. включения в теорию *дополнительных* к исходным уравнениям поля положений.

В классической электродинамике используют простейшие

модели вещества. Прежде всего тела делят на диэлектрики и проводники. Мы уже охарактеризовали с качественной стороны их свойства ранее, в § 14, п. 14.1. В § 15, модели диэлектрика и проводника обсуждаются подробнее, вводятся их количественные характеристики.

14.3. Уравнения Максвелла – Лоренца для микроскопического поля в электронной теории. Электронная теория развилась в конце XIX века как естественное продолжение теории электромагнитного поля Максвелла. В историческом плане в теории Максвелла до определенного времени внимание сосредоточивалось на макроскопическом электромагнитном поле, а природа его источников – электрических зарядов – не рассматривалась (теория имела феноменологический характер). Открытие электрона как носителя элементарного электрического заряда (Дж. Дж. Томсон, 1897 г.) заставило физиков обратиться к изучению самих электрических зарядов, а вместе с тем и к изучению строения вещества. Первым шагом на этом пути стала классическая электронная теория вещества, основоположником которой был голландский физик Г. А. Лоренц. Его работы по электронной теории относятся к 1880–1909 гг. В теории принималось, что вещество представляет собой систему связанных между собой электронов и положительных ионов. Связь между зарядами осуществляется посредством создаваемого ими микроскопического электромагнитного поля в вакууме. Микроскопическое поле носит по отношению к макроскопическому полю первоначальный характер «истинного» поля и подчиняется уравнениям, совпадающим по форме с уравнениями Максвелла для макроскопического поля в вакууме (см. уравнения (2.1), (2.3) и др.). Движение же электронов подчиняется законам механики Ньютона.

Исходные положения классической электронной теории, как это сейчас известно, не во всех случаях применимы к микромиру, так как у микроскопических объектов и систем, в частности у электронов в атоме, наблюдаются новые, квантовые свойства. Ранее в нашем курсе система уравнений Максвелла – Лоренца применялась в макроскопическом случае, т. е. не к отдельному электрону, а к заряду, содержащему множество электронов. А в классической электронной теории ее применяли к микрозарядам, что, вообще говоря, неправомерно. Несмотря на это, классическая электронная теория не потеряла своего эвристического значения до настоящего времени. с качественной стороны она объясняет ряд свойств вещества и природу многих электромагнитных явлений, происходящих в веществе, позволяет установить их электронный механизм.

Строгий теоретический анализ для соответствующих вопросов выполняется в современной электронной теории, учитывающей квантовые особенности поля и движения микрочастиц. (Она изучается в курсе теоретической физики пединститута после статистической физики.)

Сейчас мы воспользуемся основными положениями электронной теории, чтобы установить вид уравнений макроскопического поля в веществе, опираясь на уравнения Максвелла для вакуума. Для этого рассмотрим микроскопические уравнения Максвелла – Лоренца и перейдем от них к макроскопическим уравнениям для поля в веществе. Пусть $\vec{e}$ – вектор напряженности, а $\vec{b}$ – индукции микроскопического поля, созданного его «первоначальными» источниками – электронами и соответствующими элементарными зарядами положительных ионов. Уравнения Максвелла – Лоренца для микрополя приобретают вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{e} = -\dfrac{\partial \vec{b}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div}\vec{b} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot}\vec{b} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu_0\varrho\vec{u}, & (3) \\ \operatorname{div}\vec{e} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\varrho, & (4) \end{cases} \qquad (14.3)$$

где $\vec{u}$ – скорость движения заряженных частиц.

Уравнение непрерывности записывается так: $\operatorname{div} \varrho \vec{u} = -\dfrac{\partial \varrho}{\partial t}$. (14.4)

В систему входит также уравнение движения электрона. В классической электронной теории силы Лоренца для электрона выражается той же формулой, что и для макроскопического точечного заряда, т. е. если заряд электрона q, то

$$\vec{f} = q\,(\vec{e} + [\vec{u}\,\vec{b}]). \tag{14.5}$$

Система уравнений (14.3), (14.4) и (14.5) носит название системы Максвелла – Лоренца для «истинного микрополя» при условии, что $\vec{u}$ – скорость движения элементарных зарядов, ϱ – плотность микрозарядов в данной точке поля, а q – величина элементарного заряда. (Полезно заметить, что никаких предположений о дискретном распределении зарядов в пространстве в классической электронной теории не делается, т. е. электрон может рассматриваться как заряженный объект малых, но конечных размеров с конечной плотностью заряда.)

14.4. Макроскопическое усреднение уравнений Максвелла – Лоренца. В классической электронной теории предполагается, что система уравнений (14.3) описывает электромагнитное поле для элементарных зарядов на любом уровне проникновения в строение вещества, в том числе и в недрах атома. Микрополе как в самих атомах и молекулах, так и в пространстве между ними очень быстро изменяется во времени, а также при переходе от одной точки пространства к другой. Причина этих изменений заключается в дискретности вещества и быстром движении элементарных частиц. В макроскопическом плане микроскопические неоднородности и колебания поля не воспринимаются. Макроскопическое поле, измеряемое приборами и влияющее на макроскопические тела,– это усредненное в пространстве и во времени, «сглаженное» микроскопическое поле.

Поэтому в макроскопической электродинамике используются некоторые средние значения величин $\vec{e}$ и $\vec{b}$, ϱ и $\vec{u}$. Имеется в виду, что используются значения, которые можно получить усреднением истинных, по физически малым элементам объема ΔV и промежуткам времени Δt, принимаемых в макроскопической теории за бесконечно малые dV и dt. Объемы ΔV весьма велики по сравнению с объемом атомов, а интервалы Δt – по сравнению с характерным временем (периодом) изменения микрополей.

Среднее от микроскопической величины, например $\vec{e}$, находится по формуле

$$\bar{\vec{e}} = \frac{1}{16 \Delta V \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} dx' \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} dy' \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} dz'\, \vec{e}\,(x', y', z', t),$$

где $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \Delta V$. Оно определено в каждой точке пространства в каждый момент времени.

Если продифференцировать среднее значение по любой из переменных x, y, z, t или найти среднее от соответствующей производной, то в соответствии с предыдущей формулой видно, что получатся совпадающие результаты. Это значит, что операции усреднения и дифференцирования перестановочны.

Пользуясь перестановочностью операции усреднения и дифференцирования по координатам и времени, усредняем выражения (14.3):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\vec{e}} = -\dfrac{\partial \bar{\vec{b}}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div} \bar{\vec{b}} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot} \bar{\vec{b}} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{\vec{e}}}{\partial t} + \mu_0 \overline{\varrho \vec{u}}, & (3) \\ \operatorname{div} \bar{\vec{e}} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \bar{\varrho}. & (4) \end{cases} \tag{14.6}$$

Формулы (14.6) образуют в электронной теории систему уравнений для поля в веществе.

Поскольку макроскопическое поле есть усредненное микроскопическое поле, то следует определить векторы напряженности и индукции макроскопического поля равенствами

$$\vec{E} = \bar{\vec{e}}\,, \quad \vec{B} = \bar{\vec{b}}\,, \tag{14.7}$$

Тогда уравнения поля в веществе (14.6-1) и (14.6-2) принимают вид, тождественный уравнениям поля в вакууме·

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. & (2) \end{cases} \tag{14.8}$$

Если положить $\bar{\vec{j}} = \overline{\varrho\vec{u}}$, то уравнения (14.6-3) и (14.6-4) запишутся так:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\bar{\vec{j}}, & (1) \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\bar{\varrho}. & (2) \end{cases} \tag{14.9}$$

Для использования системы уравнений (14.8), (14.9) по схеме, аналогичной рассмотренной ранее для вакуума, нужно знать величины $\bar{\varrho}$ и $\bar{\vec{j}}$. Измерить их невозможно. В свою очередь, для конкретного расчета $\bar{\varrho}$ и $\bar{\vec{j}}$ в классической электронной теории не содержится необходимых сведений. Поэтому в теории должны быть привлечены дополнительные положения. Эти положения приводятся в курсе ниже и касаются электрических и магнитных свойств вещества. Они формулируются как обобщение опыта, т. е. как дополнительные к уравнениям Максвелла эмпирические соотношения.

В систему уравнений Максвелла – Лоренца, кроме уравнений (14.8), (14.9), входит еще уравнение непрерывности и уравнение движения заряженных частиц. Усредняя равенство (14.4), получаем

$$\operatorname{div}\bar{\vec{j}} = -\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t}, \tag{14.10}$$

где $\bar{\vec{j}}$ и $\bar{\varrho}$ – средние значения плотностей для микрозарядов.

Усредненное выражение для силы Лоренца (14.5), действующей на микрозаряд, приводит к формуле, аналогичной вакуумной:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + [\vec{v}\,\vec{B}]), \tag{14.11}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{B}$ – средние значения векторов, а $\vec{v}$ – скорость движения в элементе объема ΔV, по которому ведется усреднение.

Внимательный читатель заметит, что «истинные» уравнения микрополя (14.3) усредняются чисто формально, так как ничего об изменении $\vec{e}$ и $\vec{b}$ во времени и пространстве неизвестно. Но для получения уравнений поля в веществе они, по существу, и не нужны. Это понятно, так как в классической электродинамике мы всегда имеем дело уже с усредненными параметрами $\vec{E}$, $\vec{B}$, ϱ, $\vec{j}$, в том числе и для вакуума; поэтому с полным основанием мы начали рассуждения в § 14, п. 14.2, выписывая сразу систему (14.1).

§ 15. Уравнения Максвелла для поля в веществе

15.1. Поляризация вещества в электрическом поле. В § 14 электромагнитное поле в веществе представлено как поле всех электри-

ческих зарядов, входящих в систему: и свободных, и связанных. На этом пути нами получена система уравнений для усредненного макроскопического поля (14.1). Исключение из нее неизмеримых и не рассчитываемых непосредственно величин $\varrho_{\text{св з}}$ и $\vec{j}_{\text{св з}}$ составляет задачу, разрешаемую в данном параграфе. Сначала исключим плотность связанных зарядов.

Пусть диэлектрик находится в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$. Это поле создано внешними зарядами и зарядами диэлектрика. Система зарядов, входящих в состав диэлектрика, в целом электронейтральна. Не обладает она в отсутствие внешнего поля и макроскопическим дипольным моментом, так как его либо не имеют отдельные атомы и молекулы, либо молекулярные диполи ориентированы хаотически. Электрическое поле стремится раздвинуть заряды противоположных знаков в каждой молекуле и повернуть образовавшиеся (или готовые) диполи по направлению вектора $\vec{E}$ (рис. 15.1, *а*). Хаотическое тепловое движение разрушает устанавливающийся порядок в расположении микроскопических диполей, но чем больше напряженность поля, тем большее число диполей выстраивается по полю. Благодаря этому вещество *поляризуется*, т. е. приобретает макроскопический дипольный момент.

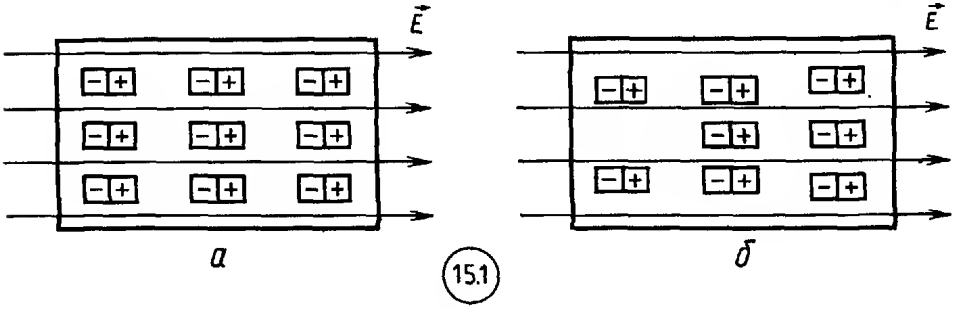
Мы будем рассматривать (впредь до специальных оговорок) пространство, целиком заполненное нейтральным диэлектриком. Под действием поля его физически малые элементы объема поляризуются и приобретают дипольные моменты $d\vec{p}$. Для описания поляризации диэлектрика в каждой его точке вводится величина, называемая *поляризованностью* или вектором поляризации:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \tag{15.1}$$

Поляризованность есть удельный дипольный момент или плотность дипольного электрического момента диэлектрика. Она может иметь различные значения в разных точках диэлектрика и в общем случае изменяться во времени:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r},\ t),$$

так как поле, вызвавшее поляризацию, может быть переменным.



15.1

С микроскопической точки зрения поляризация вызвана возникновением распределенного по пространству связанного заряда, так что

$$d\vec{p} = \vec{r}\varrho_{\text{св з}}\, dV, \tag{15.2}$$

где $\varrho_{\text{св з}}$ — средняя плотность связанных зарядов.

Из рисунка 15 1, *б* видно, что объемная плотность связанных зарядов отлична от нуля только в неоднородно поляризованном диэлектрике Если вектор $\vec{P}$ одинаков во всех точках пространства, то связанные заряды могут иметь место на границе раздела диэлектрика с вакуумом или с другим диэлектриком В таком случае

$$d\vec{p} = \vec{r}\sigma_{\text{св з}}\, dS \tag{15 3}$$

(Обсуждение граничных эффектов мы отложим до § 16, п 16 2)

Вектор поляризации $\vec{P}$ и плотность зарядов $\varrho_{\text{св з}}$ взаимосвязаны, как это видно из формул (15.1) и (15.2), и описывают в сущности один и тот же эффект — поляризацию вещества, причем

$$\vec{P} = \varrho_{\text{св з}}\vec{r}. \tag{15.4}$$

Найдем $\varrho_{\text{св з}}$ из формулы (15.4). Для этого умножим скалярно равенство (15.4) на $\vec{r}$. После деления на r^2 имеем

$$\varrho_{\text{св з}} = \frac{\vec{P}\vec{r}}{r^2}.$$

Так как плотность связанных зарядов нам нужна в основном для вычисления потенциала поля, выразим через нее потенциал (в начале координат) с помощью общей формулы (5.29). Если принять начало координат за точку наблюдения, то $\vec{r}' = -\vec{r}_0$, $\vec{r} = 0$ и

$$\varphi(0) = k\int\frac{\varrho_{\text{св з}}(\vec{r})\, dV}{r} = -k\int\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3}\, dV. \tag{15.5}$$

В этом выражении индекс 0 у переменной интегрирования опущен, а зависимость потенциала от времени, имеющая в формуле (5.29) характер запаздывания, сейчас не выписана, так как далее в выкладке не затрагивается. Интегрирование распространено по всему пространству.

Представим подынтегральное выражение в виде $\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3} = -\vec{P}\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ и воспользуемся формулой (см. П. II, 15). Тогда $P\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \operatorname{div}\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\operatorname{div}\vec{P}$ и $\varphi(0) = -k\int\frac{\operatorname{div}\vec{P}}{r}dV + k\int\operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)dV$.

Второй интеграл вычислим при следующих дополнительных предположениях: электрическое поле, вызывающее поляризацию, достаточно быстро убывает с расстоянием от начала координат, так что $\vec{P}$ — убывающая функция r, и эта величина уменьшается не медленнее, нежели $\frac{1}{r}$, при удалении на бесконечность. (Данное условие

выполняется для систем зарядов в диэлектрике, занимающих ограниченную область пространства, а также для тел из диэлектрика, имеющих ограниченный объем.) В таком случае, преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса, для бесконечно удаленной поверхности получим нулевой поток вектора $\frac{\vec{P}}{r}$. Отсюда

$$\varphi(0) = -k\int \frac{\operatorname{div}\vec{P}}{r}\,dV. \tag{15.6}$$

Сравнивая формулы (15.5) и (15.6), получаем для начала координат $\varrho_{\text{св }з} = -\operatorname{div}\vec{P}$. Так как эта точка была выбрана произвольно, формула справедлива для любой точки пространства независимо от выбора начала системы координат, т. е.

$$\varrho_{\text{св }з}(\vec{r}) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}). \tag{15.7}$$

Такова зависимость между плотностью связанных объемных зарядов и поляризованностью вещества. Связь поверхностной плотности связанных зарядов $\sigma_{\text{св }з}$ с вектором поляризации $\vec{P}$ установим позднее, в § 17, п. 17.2.

Для решения задачи, поставленной в начале параграфа, необходимо установить зависимость поляризованности диэлектрика от напряженности электрического поля в нем, что и позволит окончательно исключить $\varrho_{\text{св }з}$ из системы уравнений (14.1). Но в рамках классической электродинамики эта связь теоретически не определяется, поэтому приходится прибегнуть к экспериментальным данным. На основании опыта *принимается, что поляризация пропорциональна напряженности поля:*

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \tag{15.8}$$

где χ — эмпирически определяемый коэффициент — *диэлектрическая восприимчивость* вещества. Она считается не зависящей от напряженности поля. Для всех веществ $\chi > 0$. Коэффициент ε_0 введен из соображений размерности; χ удобно иметь безразмерной величиной. (Часто вместо χ используется размерная величина — диэлектрическая восприимчивость $\varkappa_e$, равная $\chi\varepsilon_0$.)

Подчеркнем, что пропорциональность поляризованности и напряженности поля, во-первых, закономерность эмпирическая; во-вторых, она заведомо приблизительна и в сильных полях не выполняется. Поэтому введение формулы связи (15.8) в классической электродинамике является одним из источников значительного уменьшения общности ее выводов для поля в веществе по сравнению с вакуумом.

Но вернемся к решаемой задаче. С помощью равенств (15.7) и (15.8) можно исключить из уравнения поля (14.1) плотность связанных зарядов:

$$\varrho_{\text{св }з} = -\varepsilon_0\operatorname{div}(\chi\vec{E}). \tag{15.9}$$

(Это будет сделано окончательно в пп. 15.3, 15.4.)

При однородной поляризации объемных зарядов, как свидетельствует формула (15.7), нет. (Нет их и в проводниках.) Связанные заряды в этих случаях имеются только на границах раздела диэлектриков, и их поверхностная плотность находится по формулам, выводимым ниже.

15.2. Намагничивание вещества. Обратимся теперь к определению через измеримые параметры поля средней плотности, образованного связанными зарядами тока. При поляризации вещества имеют место упорядоченные смещения электрических зарядов, приводящие к току связанных зарядов. Плотность тока $\vec{j}_{\text{св.з}}$ зависит от скорости изменения вектора поляризации $\vec{P}$. Покажем это, используя условие сохранения связанных зарядов:

$$-\frac{\partial \varrho_{\text{св з}}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}}.$$

С учетом формулы (15.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}},$$

откуда

$$\vec{j}_{\text{св.з}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \tag{15.10}$$

На основании соотношения (15.8) пишем:

$$\vec{j}_{\text{п}} = \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{15.11}$$

(Поскольку данная составляющая тока связанных зарядов обусловлена смещениями их под действием переменного электрического поля, можно сказать, что это ток поляризации, что и отражено в обозначении.)

Кроме тока поляризации, в веществе имеет место другая составляющая тока связанных зарядов, обусловленная упорядочением магнитных моментов атомов или молекул в магнитном поле. Магнитные свойства вещества в конечном счете определяются тем, что электроны при движении внутри атома уподобляются замкнутым токам и создают орбитальные магнитные моменты; кроме того, они обладают собственными (спиновыми) магнитными моментами.

Движение электронов и магнитные моменты электронов правильно описываются только в квантовой физике, что создает определенные трудности при классическом подходе к ним в электродинамике. Здесь можно получить только довольно грубую качественную картину явления намагничивания. Реальные носители магнитных моментов обычно заменяются так называемыми «молекулярными круговыми токами» (гипотеза о существовании таких токов была впервые высказана А. Ампером в 1820 г.).

Каждому молекулярному току соответствует элементарный магнитный диполь. По характеру поведения элементарных диполей вещества делятся на три основных класса: *парамагнитные, диамагнитные* и *ферромагнитные*. У пара- и ферромагнитных веществ ча-

стицы обладают элементарными магнитными моментами в отсутствие внешнего магнитного поля, но эти моменты ориентированы в пространстве хаотично, так что макроскопические объемы вещества магнитными моментами не обладают.

Во внешнем магнитном поле элементарные моменты выстраиваются по полю, тем самым усиливая его,– таков с качественной стороны механизм намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков. У парамагнетиков намагничивание имеет место только во внешнем поле, а у ферромагнетиков сохраняется и после снятия внешнего поля; кроме того, намагничиваются ферромагнетики гораздо сильнее.

Молекулярные магнитные моменты в диамагнетике возникают только во внешнем поле и ориентируются против поля, ослабляя его.

Основной величиной, описывающей макроскопические магнитные свойства вещества, являются *вектор намагниченности*, равный плотности магнитного момента:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \qquad (15.12)$$

(В формуле (15.12) dV – физически малый объем вещества, обладающий макроскопическим магнитным моментом $d\vec{m}$.) В общем случае $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r},\ t)$.

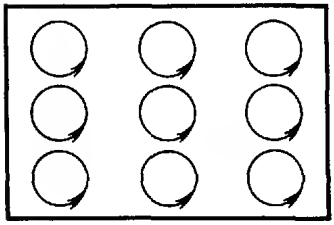
Возникновение намагниченности вызывается, как уже говорилось, упорядоченностью в пространстве элементарных магнитных диполей, соответственно – упорядоченностью молекулярных токов (рис. 15.2). Суммарное их действие может быть описано, если ввести плотность тока связанных зарядов, вызывающего намагничивание в соответствии с формулами для токов свободных зарядов. Поэтому должна использоваться общая формула (5.29) для векторного потенциала поля:

$$\vec{A}(\vec{r}) = f\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r} dV_0.$$

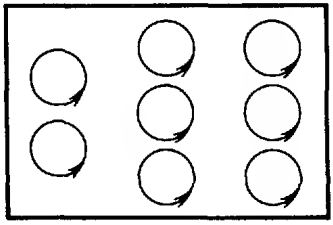
В точке наблюдения, совпадающей с началом координат, для связанных зарядов согласно ей имеем

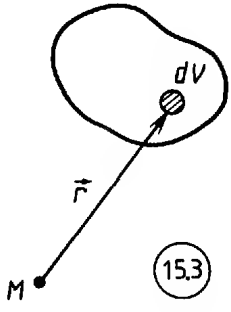
$$\vec{A}(0) = f\int \frac{\vec{j}_{\text{св з}}(\vec{r})}{r} dV. \qquad (15.13)$$

(Зависимость всех величин от времени опускаем.)



15.2





15.3

Так как в принятой модели магнитные свойства вещества исчерпываются магнитными моментами элементарных объемов $d\vec{m} = \vec{j}dV$, то потенциал можно вычислить и с помощью формулы (8.12) как созданный элементарными магнитными диполями:

$$d\vec{A} = f\frac{[d\vec{m}\vec{r}]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента объема dV к точке наблюдения. Выбирая начало координат в точке наблюдения (рис. 15.3) и интегрируя по объему, получаем

$$\vec{A}(0) = -f\int\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}dV.$$

На основании векторного тождества (см. П. II, 22)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}\vec{J} + \frac{[\vec{J}\vec{r}]}{r^3},$$

так что

$$\vec{A}(0) = f\int\frac{\operatorname{rot}\vec{J}}{r}dV - f\int\operatorname{rot}\frac{\vec{J}}{r}dV.$$

Делая те же дополнительные предположения о характере поля, что и в § 15, п. 15.1, устанавливаем равенство нулю последнего интеграла.

Введем обозначения:

$$\vec{Z} = \int\operatorname{rot}\frac{\vec{J}}{r}dV.$$

Если $\vec{C}$ – постоянный вектор, то

$$\vec{C}\vec{Z} = \int\vec{C}\operatorname{rot}\frac{\vec{J}}{r}dV.$$

Применяя формулу (см. П. II, 31), получаем

$$\vec{C}\vec{Z} = \int\limits_V \operatorname{div}\left[\vec{C}\frac{\vec{J}}{r}\right]dV.$$

По теореме Гаусса

$$\vec{C}\vec{Z} = \oint\limits_S \frac{[\vec{C}\vec{Z}]}{r}d\vec{S}\,.$$

Сдвигая поверхность интегрирования в бесконечность, получаем $\vec{C}\vec{Z} = 0$. Вследствие произвольности вектора $\vec{C}$ оказывается, что $\vec{Z} = 0$

Таким образом,

$$\vec{A}(0) = f\int\frac{\operatorname{rot}\vec{J}}{r}dV. \qquad (15.14)$$

Сравнивая формулу (15.13) с выражением (15.14), находим

$$\vec{j}_{\text{св.з}} = \operatorname{rot}\vec{J}. \qquad (15.15)$$

Эта составляющая тока связанных зарядов может быть названа током намагниченности $-\vec{j}_{\text{м}}$. Остается еще установить связь между

намагниченностью и индукцией поля в веществе. Здесь снова приходится выйти за пределы исходных уравнений электродинамики и обратиться к эксперименту – намагниченность оказывается пропорциональной индукции поля:

$$\vec{J} = \frac{\alpha}{\mu_0}\vec{B},$$

коэффициент пропорциональности записан так, чтобы α была безразмерной величиной.

Однако в классической электродинамике употребляется другой коэффициент, носящий название *магнитной восприимчивости* и обозначающийся через $\varkappa$. Он связан с введенным нами коэффициентом α соотношением

$$\alpha = \frac{\varkappa}{1+\varkappa}.$$

Итак, для зависимости намагниченности от индукции поля имеем формулу

$$\vec{J} = \frac{\varkappa}{\mu_0(1+\varkappa)}\vec{B}. \tag{15.16}$$

(Обычно $\varkappa$ определяется соотношением $\vec{J} = \varkappa\vec{H}$. Но в нашем курсе для раскрытия физического смысла $\vec{H}$ эта величина вводится позднее.)

Следует иметь в виду, что приблизительное постоянство α и магнитной восприимчивости $\varkappa$ соблюдается только для парамагнитных и диамагнитных веществ. При этом у парамагнетиков $\varkappa > 0$, у диамагнетиков $\varkappa < 0$, а абсолютное значение много меньше единицы. У ферромагнетиков восприимчивость положительна и велика: она колеблется от десятков до многих тысяч единиц, причем зависит от индукции внешнего поля $\vec{B}$, и эта зависимость имеет сложный вид.

Явления намагничивания весьма сложны. В частности, магнитная восприимчивость различна для статических и переменных полей, так как в последних дополнительное намагничивание вызывают вихревые токи в веществе; сказываются и некоторые другие процессы. Классическая электродинамика, как уже говорилось, в детали не входит, ограничиваясь обычно довольно грубой моделью – пропорциональной зависимостью между намагниченностью и индукцией, отраженной в формуле (15.16).

Располагая формулами (15.15) и (15.16), можно решить ранее поставленную задачу, т. е. выразить ток намагничивания через индукцию поля в веществе:

$$\vec{j}_{\text{м}} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\vec{B}. \tag{15.17}$$

Но необходимо заметить, что $\vec{j}_{\text{м}}$ никакому реальному движению зарядов в точности не соответствует, так как намагниченность

вещества возникает не за счет макроскопических токов. Ток намагниченности – фиктивный ток, используемый при анализе усредненных уравнений поля и исключаемый из окончательных формул.

15.3. Уравнения Максвелла для поля в веществе. Напряженность магнитного и индукция электрического полей. Исключим теперь $\varrho_{\text{св з}}$ и $\vec{j}_{\text{св з}}$ из «усредненных» уравнений (14.1) с помощью формул (15.7), (15.10) и (15.15):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{J} + \vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\vec{P}. \end{cases} \tag{15.18}$$

Система (15 18) описывает поле в веществе с учетом электромагнитных свойств вещества и с привлечением двух дополнительно введенных векторов – характеристик электромагнитного состояния вещества $\vec{P}$ и $\vec{J}$.

Третье и четвертое уравнения системы (15.18) можно преобразовать, группируя члены:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) + \vec{j}, \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varrho. \end{cases} \tag{15.19}$$

Отсюда видна целесообразность введения двух новых величин, упрощающих уравнения (15.19). Вместо $\vec{P}$ и $\vec{J}$ используются параметры $\vec{H}$ и $\vec{D}$, определяемые формулами

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{J}; \tag{15.20}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{15.21}$$

Уравнения (15.18) с учетом формул (15.19), (15.20), (15.21) принимают следующий общепринятый вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, & (3) \\ \operatorname{div}\vec{D} = \varrho. & (4) \end{cases} \tag{15.22}$$

Эта система уравнений для поля в веществе в честь основоположника электродинамики носит название уравнений Максвелла.

Система уравнений (15.22) отличается от уравнений поля в вакууме наличием двух новых векторов: напряженности магнитного

поля $\vec{H}$ и индукции электрического поля $\vec{D}$. С помощью этих векторов учитывается «вклад» зарядов вещества в общее поле.

Так как векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ исчерпывающе характеризуют поле, определяя силу, действующую на заряды в поле, энергию и импульс поля, то дополнительные его характеристики $\vec{H}$ и $\vec{D}$ могут рассматриваться как вспомогательные величины, упрощающие запись уравнений: последние оказываются в таком случае наиболее симметричными по отношению к параметрам электрической и магнитной составляющих поля.

(В истории развития учения об электромагнетизме величина $\vec{H}$ была введена в связи с «магнитными зарядами» и сопоставлялась с напряженностью поля $\vec{E}$; индукции $\vec{B}$ и $\vec{D}$ характеризовали поле зарядов в веществе.)

15.4. Магнитная и диэлектрическая проницаемость вещества. Материальные уравнения. В формулах (15.20) и (15.21) связано, соответственно, по три параметра. Однако, как это показано ранее в пунктах 15 1 и 15.2, поляризация $\vec{P}$ определяется напряженностью электрического поля, а намагниченность – индукцией магнитного.

Подставляя в формулу (15.20) значение $\vec{j}$ из (15.16), имеем

$$\vec{H} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + \varkappa)}.$$

Введем *магнитную проницаемость* вещества определением:

$$\mu = 1 + \varkappa \tag{15.23}$$

Теперь

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}. \tag{15.24}$$

Аналогично формула (15.21) при подстановке (15.8) дает

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi)\vec{E}.$$

Если ввести *диэлектрическую проницаемость* вещества определением

$$\varepsilon = 1 + \chi, \tag{15.25}$$

то для электрической индукции имеем

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{15.26}$$

Параметры μ и ε, характеризующие магнитные и электрические свойства вещества, в общем случае являются функциями координат точки пространства:

$$\mu = \mu(\vec{r}),\ \varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$$

и для неподвижной среды не зависят от времени.

В соответствии с формулами, определяющими проницаемости, для пара- и ферромагнетиков $\mu > 1$, для диамагнетиков $\mu < 1$, а диэлектрическая проницаемость ε всегда больше единицы.

Для нахождения поля в веществе используют систему уравнений

Максвелла (15.22), добавляя к ней два так называемых «материальных» уравнения (15.24) и (15.26), а также третье — эмпирическое соотношение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \tag{15.27}$$

выражающее связь тока свободных зарядов (тока проводимости) в веществе со свойствами вещества и напряженностью поля $\vec{E}$. Здесь γ — *удельная электрическая проводимость* вещества; она не зависит от напряженности поля $\vec{E}$ и определяется, как и ε, μ, экспериментально. Выражение (15.27) называется также дифференциальной формой закона Ома.

В важном частном случае стационарных полей, как это вытекает из уравнений (3) и (4) системы (15.22), напряженность магнитного поля $\vec{H}$ и индукция электрического $\vec{D}$ определяются только свободными зарядами точно так же, как векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ поля в вакууме. По этой причине величины $\vec{H}$ и $\vec{D}$ приобретают самостоятельное значение. При расчетах рационально найти сначала эти векторы, а к величинам $\vec{B}$ и $\vec{E}$ переходить в случае необходимости с помощью материальных уравнений (15.24) и (15.26).

Особо подчеркнем, что система уравнений Максвелла (15.22) описывает электромагнитное поле в неподвижной среде. По этой причине изменения во времени всех величин, входящих в уравнения ($\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, ϱ, $\vec{j}$), рассматриваются в точке с неизменяющимися координатами, что и отражено в знаке частной производной по времени.

В уравнениях ϱ — плотность свободных зарядов, не скомпенсированных связанными.

§ 16. Характерные особенности полей в веществе

16.1. Уравнения поля в потенциалах. Поля в веществе по сравнению с полями в вакууме приобретают некоторые особенности. К их выяснению в процессе применения основной системы уравнений Максвелла (15.22) для расчета полей мы и приступаем.

Для нахождения векторов поля, кроме плотности зарядов и плотности токов, должны быть заданы и величины, характеризующие свойства вещества:

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}),\ \mu = \mu(\vec{r}),\ \gamma = \gamma(\vec{r}).$$

Задача по расчету поля математически чрезвычайно сложна, и мы сначала рассмотрим частный, но в практическом и теоретическом отношении важный случай изотропного однородного вещества, непрерывно заполняющего все пространство. (Кроме того, действуют и другие ограничения, сформулированные в предыдущем параграфе.)

Для постоянных μ и ε систему уравнений (15.22) можно записать в

форме, удобной для сопоставления с вакуумными уравнениями (2.1) или (2.3):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\vec{j}, & (3) \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho. & (4) \end{cases} \qquad (16.1)$$

Далее при анализе и решении уравнений (16.1) мы широко используем соотношения, полученные ранее для поля в вакууме, не повторяя выкладок, если их конечный результат можно указать, опираясь на формальную аналогию между системой (16.1) и всесторонне исследованной ранее системой (2.1). Ввиду того что уравнения Максвелла для вакуума получаются из уравнений Максвелла для вещества при $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, многие общие соотношения, полученные ранее для вакуума, справедливы для вещества при замене μ_0 на $\mu\mu_0$ и ε_0 на $\varepsilon\varepsilon_0$. Если этим правилом осмотрительно пользоваться (нужно помнить, что μ и ε — функции координат точек пространства), то ряд результатов можно взять в готовом виде.

Определим потенциалы электромагнитного поля в веществе так же, как они определены для вакуума, т. е. формулами (4.1) и (4.2):

$$\begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{cases} \qquad (16.2)$$

В таком случае уравнения (16.1) приводятся к потенциалам совершенно аналогично уравнениям (2.1). Не повторяя выкладки, проделанной в § 4, п. 4.2, пишем:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j}, \\ \Delta\varphi - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{cases} \qquad (16.3)$$

Условие Лоренца для калибровки потенциалов приобретает вид

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (16.4)$$

Далее нахождение потенциалов поля, созданного системой заря-

дов, ничем не отличается от рассмотренного ранее случая вакуума (§ 5). В результате имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_0} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dV_0,$$
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int\limits_{V_0} \frac{\varrho\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dV_0. \tag{16.5}$$

Потенциалы изменились в однородном веществе по сравнению с полем в пустоте кратно $\frac{1}{\varepsilon}$ и μ ; изменяются также векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а скорость распространения возмущений становится равной c':

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{16.6}$$

Кроме вещественной непрерывной среды, часто приходится рассматривать отдельные тела конечных размеров или их системы, находящиеся в поле и отделенные от пустоты, вещественной среды, или друг от друга границами раздела.

Если заряды в вакууме в изученной ранее макроскопической теории считались распределенными непрерывно (кроме точечных), то при наличии тел такая непрерывность нарушается: имеют место заряды на поверхностях, являющихся границами тел или границами раздела между областями с различными значениями параметров μ, ε, γ. Это значит, что приходится вводить и рассматривать поверхностные плотности зарядов и токов. В некоторых случаях имеются линейные проводник, нити из диэлектрика, поэтому приходится рассматривать линейные плотности. Соответствующие величины мы будем обозначать либо особыми буквами, либо теми же буквами, что и объемные плотности, но снабжать их поясняющими индексами:

$$\sigma = \varrho_{\text{пов}} = \frac{dQ}{dS},\quad \vec{j}_{\text{пов}} = \varrho_{\text{пов}}\vec{v}.$$

(Во второй формуле вектор скорости движения физически бесконечно малого заряда касателен к поверхности, на которой находится заряд.)

$$\tau = \varrho_{\text{лин}} = \frac{dQ}{dl},\quad \vec{j}_{\text{лин}} = \varrho_{\text{лин}}\vec{v}.$$

(В формуле для $\vec{j}_{\text{лин}}$ вектор скорости касателен к заданной линии.)

Поскольку общие формулы для потенциалов поля в непрерывной

среде (16 5) учитывают только объемные заряды, то при наличии заряженных поверхностей и линий в пространстве в них следует добавить слагаемые вида

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu f \int\limits_{S_0} \dfrac{\vec{j}_{\text{пов}}\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dS_0, \\ \varphi = \dfrac{k}{\varepsilon} \int\limits_{S_0} \dfrac{\varrho_{\text{пов}}\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dS_0, \end{cases} \tag{16.7}$$

или

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu f \int\limits_{L_0} \dfrac{\vec{j}_{\text{лин}}\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dl_0, \\ \varphi = \dfrac{k}{\varepsilon} \int\limits_{L_0} \dfrac{\varrho_{\text{лин}}\left(\vec{r}_0,\ t - \dfrac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)}{r'} dl_0. \end{cases} \tag{16 8}$$

Соответствующие члены должны быть учтены в формулах для напряженности и индукции поля, а также в ряде других соотношений

Кроме этого, надо иметь в виду, что наличие тел и сплошных сред, отделенных друг от друга границами, порождает много задач, применение к которым известных общих уравнений поля в потенциалах (16.5), (16.7) и (16.8) либо невозможно, либо неэффективно. В конкретных случаях часто приходится обращаться к исходным уравнениям поля (15.22) или к уравнениям в потенциалах (16.3), записывая и решая их совместно для нескольких областей пространства при разнообразных граничных условиях.

16.2. Граничные условия. Общее решение уравнений поля при наличии вещества содержит некоторые произвольные функции. Эти функции при переходе к частным решениям исключаются при помощи заданных начальных и граничных условий. В случае системы зарядов в вакууме граничные условия фактически сводились к достаточно быстрой убыли векторов и потенциалов поля на бесконечном расстоянии от системы. При наличии вещественных тел помимо этого необходимо учитывать пространственные границы тел, на которых параметры поля имеют заданное значение. (Например, потенциал поверхности проводника постоянен во всех его точках, напряженность электрического поля перпендикулярна к поверхности проводника и т. д.)

Граничные условия теперь весьма разнообразны и существенно влияют на распределение поля в пространстве. Как мы увидим далее на примерах, может быть поставлен вопрос о расчете поля в ограни-

ченной области пространства около системы зарядов. В таком случае поле на границе должно быть задано, тогда в остальных точках оно определяется с помощью решения уравнений Максвелла.

Такова одна особенность поля в веществе, состоящая в наличии границ и необходимости задания граничных условий на конечных расстояниях от зарядов. Другая особенность поля, обусловленная границами раздела вещественных сред, состоит в поведении векторов поля на границах раздела двух сред с разными значениями их электромагнитных параметров. На границе раздела двух веществ величины ε, μ, γ изменяются скачком, т. е. функции $\varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r}), \gamma(\vec{r})$ терпят конечный разрыв. Соответственно скачком изменяются и векторы поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. Очевидно, что для описания поля необходимо знать поведение векторов поля на таких границах. Это важная новая задача электродинамики. Изменение полевых величин $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ на поверхности раздела двух материальных сред описывается равенствами, носящими название граничных условий.

Уравнения Максвелла дают возможность для всех векторов поля установить граничные условия, если прибегнуть к следующему приему. Пусть S – поверхность, являющаяся границей раздела двух сред с проницаемостями μ_1, ε_1 и μ_2, ε_2 и проводимостями γ_1 и γ_2. Окружим границу раздела двумя поверхностями, выделяющими тонкий слой (рис. 16.1). Считая, что параметры среды и поле изменяются не на самой границе, а в этом слое, причем изменяются непрерывно, применим к слою уравнения Максвелла. Затем устремим толщину слоя к нулю и получим граничные условия.

Найдем граничные условия для векторов поля $\vec{B}$ и $\vec{D}$, входящих в систему (15.22) под знаком дивергенции. На рисунке 16.2 около границы раздела выделен малый цилиндр высотой h. Интегрируя по объему цилиндра последнее уравнение системы, получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = Q,$$

где Q – заряд, находящийся внутри цилиндра. Преобразуем интеграл по теореме Гаусса, причем выделим интегрирование по основаниям и боковой поверхности:

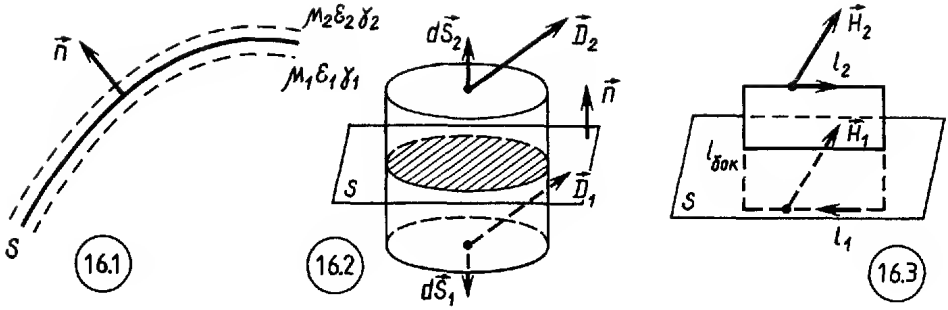
$$\int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

Учитывая, что S_1 и S_2 – малые равные величины, и применяя теорему о среднем, получаем

$$D_{2n} S - D_{1n} S + \langle D_{\text{бок}} \rangle 2\pi r h = Q.$$

Осталось устремить высоту цилиндра к нулю. Получается

$$D_{2n} - D_{1n} = \frac{Q}{S}, \text{ или } D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{16.9}$$



Таким образом, нормальная составляющая электрической индукции терпит разрыв на границе раздела, если только эта граница заряжена. Что касается нормальной составляющей электрической напряженности, то, пользуясь (15.26), имеем

$$\varepsilon_2\varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_1\varepsilon_0 E_{1n} = \sigma. \tag{16.10}$$

Напряженность терпит разрыв и на незаряженной поверхности:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{16.11}$$

Переходим к магнитной составляющей поля. Так как $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, то сразу имеем

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{16.12}$$

откуда следует

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{16.13}$$

Формулы (16.9), (16.11), (16.12) и (16.13) выражают граничные условия для нормальных составляющих векторов поля на границе раздела двух сред. Полезно заметить, что номера сред согласованы с направлением нормали: *нормаль идет от границы во вторую среду.*

Выведем далее граничные условия для тангенциальных составляющих, для чего выделим величины, входящие в уравнения Максвелла под знаком ротора. Выберем малый плоский контур L, пересекающий границу раздела двух сред (рис. 16.3), и проинтегрируем третье уравнение из системы (15.22) по площадке S, ограниченной этим контуром:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{H}\,d\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,d\vec{S} + \int_S \vec{j}\,d\vec{S}.$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства по теореме Стокса, а к первому интегралу в правой части применим теорему о среднем:

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = I + \left\langle \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right\rangle \vec{S}.$$

Здесь I – полный ток через площадку. Выделим интегрирование по отдельным отрезкам контура и воспользуемся их малостью:

$$-H_{1t}\,l + H_{2t}\,l + 2\,\langle H_{\text{бок}}\rangle\, l_{\text{бок}} = I + \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\rangle \vec{S}.$$

Устремляя теперь $l_{\text{бок}}$ к нулю, приходим к искомому соотношению

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{I}{l} = j_{\text{пов}}. \tag{16.14}$$

Таким образом, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля терпит разрыв при условии, что по поверхности раздела течет ток. Очевидно, что терпит разрыв и тангенциальная составляющая магнитной индукции:

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2\,\mu_0} - \frac{B_{1t}}{\mu_1\,\mu_0} = j_{\text{пов}}, \tag{16.15}$$

но этот разрыв сохраняется и в случае отсутствия тока; при $j_{\text{пов}} = 0$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{16.16}$$

Обратим внимание на то, что теперь номера сред согласованы с выбором положительного направления касательной к сечению; во *второй* среде оно совпадает с направлением обхода контура.

Если исходить из последнего уравнения системы Максвелла, то рассуждения полностью повторяются, и для тангенциальной составляющей вектора $\vec{E}$ получаем соотношение

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \tag{16.17}$$

Она непрерывна, тогда как для электрической индукции в соответствии с формулой (15.26) имеем разрыв непрерывности, причем

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{16.18}$$

Выведем также граничные условия для плотности тока при переходе через границу двух проводящих сред. Поскольку $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, то для тангенциальной составляющей на основе формулы (16 17) имеем

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{16.19}$$

Граничное условие для нормальной составляющей выводится из закона сохранения заряда:

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Далее выкладка аналогична примененной при выводе формуле (16.9). Окончательный результат таков:

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{16.20}$$

т. е. плотность тока испытывает разрыв при условии увеличения или уменьшения заряда на поверхности раздела.

Для удобства использования поместим систему основных граничных условий в таблицу 1.

Таблица 1

Система граничных условий

	Нормальная составляющая		Тангенциальная составляющая	
	Напряженность	Индукция	Напряженность	Индукция
Электрическое поле	$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2t} - E_{1t} = 0$	$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$
Магнитное поле	$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$	$B_{2n} - B_{1n} = 0$	$H_{2t} - H_{1t} = j_{\text{пов}}$	$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \mu_0 j_{\text{пов}}$
Плотность тока	$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$		$\frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	

Найденные соотношения, которым удовлетворяют векторы поля и плотность тока на границе раздела сред, являются очень важными: они широко используются в конкретных случаях отыскания полей, распределения зарядов и токов на проводниках и диэлектриках при наличии поля. Это очень общие заключения, сделанные нами относительно поля при наличии вещества с помощью уравнений Максвелла.

Как уже отмечалось выше, с введением в систему поле-заряды вещества возникает целый ряд новых задач на расчет полей и распределение зарядов, так как появляются границы тел и сред с различными значениями μ, ε, γ. Так, в стационарных полях приходится рассматривать системы тел — проводников и диэлектриков, что составляет предмет электростатики. Отдельно в проводниках изучается постоянный и переменный ток и т. д. Наконец, требуется

исследовать поведение электромагнитных волн на границе раздела двух сред (например, теоретические основы законов отражения и преломления света). Эти и подобные им вопросы рассматриваются в последующих темах курса с применением формул граничных условий.

16.3. Энергия и импульс поля в веществе. Среди общих вопросов, которые следует выяснить заново, очень важна задача об энергии и импульсе электромагнитного поля. Для поля в веществе можно повторить выкладку, выполненную для вакуума в § 3, п. 3.2, опираясь на уравнения Максвелла (15.22). Умножая первое из них скалярно на $\vec{H}$, а третье – на $\vec{E}$, с помощью использованных ранее приемов приходим к равенству

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B})=\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]+\vec{j}\vec{E}. \tag{16.21}$$

Заметим, что с использованием векторов $\vec{H}$ и $\vec{D}$ для вакуума уравнение (3.4) имеет такой же вид, как и уравнение (16.21). Так что все последующие соотношения можно выписывать сразу, не повторяя рассуждений, а лишь заменяя в формулах § 3 $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ на $\vec{H}$ и $\varepsilon_0\vec{E}$ на $\vec{D}$.

Формула (16.21) выражает закон изменения энергии электромагнитного поля в веществе и дает основание для введения плотности энергии поля:

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}) \tag{16.22}$$

и плотности потока энергии:

$$\vec{\sigma}=[\vec{E}\vec{H}]. \tag{16.23}$$

Полученные формулы имеют общий смысл, так как при их выводе никаких дополнительных ограничений на поле и среду не накладывалось. Они справедливы для неподвижной непрерывной неоднородной среды. Однако в толковании закона изменения энергии электромагнитного поля в веществе (16.21) в сравнении с вакуумом имеются некоторые особенности. Во-первых, вещество по ранее поставленному условию неподвижно; следовательно, работа поля $\vec{j}\vec{E}$, совершаемая при перемещении зарядов, относится к зарядам, движущимся в проводниках. Но в таком случае с помощью уравнения (15.27) имеем:

$$\vec{j}\vec{E}=\frac{j^2}{\gamma}. \tag{16.24}$$

Эта работа идет на повышение внутренней энергии тел в системе, т. е. мы приходим к закону Джоуля – Ленца (в дифференциальной форме): теплота $\tilde{Q}$, выделяемая при движении зарядов в проводнике в единице объема за 1 с, определяется формулой

$$\tilde{Q} = \frac{j^2}{\gamma}. \qquad (16.24\text{-а})$$

Таким образом, последнее слагаемое в (16.21) выражает теплоту, выделяемую в системе за счет убыли энергии поля.

Формула (16.21) справедлива и для случая кусочно-непрерывной среды, т. е. при наличии конечных разрывов непрерывности параметров μ и ε. В частности, в пространстве могут иметь место участки, не заполненные веществом. Для них слагаемое $\vec{j}\vec{E}$ имеет прежний «вакуумный» смысл. Это работа поля по повышению кинетической энергии свободных зарядов.

Вторая особенность применения формулы (16.21) состоит в том, что в веществе поле может иметь границы, через которые поток энергии не проходит. В таком случае закон сохранения энергии в изолированной системе (3.10) имеет место не только для бесконечно больших, но и *конечных* областей пространства, в которых «заперто» электромагнитное поле:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) dV = \int\limits_V \frac{j^2}{\gamma} dV. \qquad (16.25)$$

В заключение несколько слов об импульсе электромагнитного поля. При тех же допущениях о неподвижности вещества по аналогии с формулой (3.17) имеем выражение для плотности импульса:

$$\vec{g} = [\vec{D}\,\vec{B}]. \qquad (16.26)$$

Но вопрос об импульсе электромагнитного поля в веществе в классической электродинамике решается неоднозначно, о чем будет сказано ниже, в § 23.

Методические указания и рекомендации

1. Уравнения электромагнитного поля для вещества (15.22) вместе с материальными уравнениями (15.24), (15.26), (15.27) являются теоретическим обобщением эмпирических законов электромагнетизма, выполненным Д. К. Максвеллом в 1860–1865 гг. Именно уравнения поля в веществе послужили основой электродинамики в процессе ее исторического развития и становления. К уравнениям поля в вакууме ((2.1), (2.3) и др.) можно, вообще говоря, перейти как к частному случаю уравнений системы (15.22), полагая $\mu = 1$ и $\varepsilon = 1$.

Таким образом, в смысле математической общности уравнения Максвелла для вещества шире, чем исходные для нашего курса уравнения Максвелла для вакуума, так как последние содержатся в первых для частного случая среды с единичными значениями проницаемостей. Поэтому большинство курсов электродинамики основывается на уравнениях Максвелла для вещества. Однако фундаментальный характер имеют все же не они, а уравнения поля в вакууме, которые имеют обширнейшую область применения, простирающуюся от границ самых больших изученных расстояний во Вселен-

ной до расстояний порядка 10^{-17} м. И везде электромагнитные взаимодействия подчиняются этим уравнениям. (Необходимо только заметить, что в квантовой физике прямая силовая трактовка векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ неприменима и эти величины заменяются их операторами. Так что переход от микроскопических уравнений электромагнитного поля к макроскопическим оказывается переходом от формул, связывающих операторы, к формулам, связывающим усредненные макроскопические значения величин.)

Уравнения для вакуума считаются строгими законами природы, и выводы из них не знают до сих пор каких-либо отклонений от эксперимента. Так, например, закон Кулона выполняется с доступной эксперименту точностью — от космических расстояний и вплоть до изученных самых малых.

Иное положение вещей имеет место в теории электромагнитного поля в веществе, основанной на уравнениях Максвелла (15.22). Область применимости этих уравнений ограничена допущениями об электромагнитных свойствах вещества, сделанными в материальных уравнениях. Эмпирические зависимости

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad J = \frac{\varkappa}{(1+\varkappa)\mu_0} \vec{B}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

являются довольно грубыми и далеко не общими. Линейность указанных соотношений — лишь приближение, справедливое не для всех веществ и не при всех значениях поля. Так, ферромагнетики и антиферромагнетики характерны не линейной, а весьма сложной и неоднозначной зависимостью между величинами $\vec{B}$ и $\vec{H}$. Для сегнетоэлектриков аналогично обстоит дело с зависимостью между величинами $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Неприменимы уравнения Максвелла и для полупроводников. При высоких частотах переменного электромагнитного поля уравнения также неприменимы, ибо при малых длинах волн теряет смысл макроскопическое усреднение. Наконец, при больших напряженностях и индукциях поля появляются нелинейные эффекты, лежащие за пределами рассматриваемой теоретической схемы.

Следует принять во внимание и то обстоятельство, что скалярный характер электромагнитных параметров вещества ε, μ, γ говорит лишь об изучении изотропных сред. Поскольку кристаллы обладают анизотропией, то и к ним рассматриваемые уравнения не всегда применимы.

Сказанное об ограниченности системы уравнений Максвелла для вещества не умаляет их роли в различных приложениях. Дело в том, что уравнения (15.22), как правило, применяются не в общем случае, а в разнообразных частных случаях, когда указанные допущения справедливы. Хорошо описываются электромагнитные явления в

задачах, когда можно ограничиться частью уравнений, взять не все входящие в них члены.

Например, если в общем случае зависимость поляризованности и намагниченности от векторов поля не сводится к пропорциональной, то в частном случае электростатического и магнитостатического полей (в пара- и диамагнетиках) эта зависимость выполняется. Другим примером является использование уравнения (3) из системы (15.22). Как правило, для проводников $\left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| \ll |\vec{j}|$, и тогда уравнение имеет вид $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$. В диэлектриках же $|\vec{j}| \ll \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|$, и следует писать $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Таким образом, с точки зрения природы физических явлений в уравнении искусственно соединены две закономерности в одну.

Необходимо также заметить, что хотя точный количественный расчет электромагнитных процессов в веществе с помощью уравнений Максвелла возможен не всегда, качественное описание и понимание с их помощью достигается для очень широкого круга явлений. И это очень важно в познавательном отношении для создания определенных представлений об электромагнитных явлениях и свойствах вещества.

Все сказанное о меньшей общности, ограниченной применимости уравнений Максвелла в среде позволяет понять методическую целесообразность построения курса на основе уравнений в вакууме. Если переход от уравнений в пустоте к уравнениям в веществе и не является выводом последних из первых в полном смысле слова, то он, во всяком случае, полезен в методическом плане, поскольку вскрывает роль вещества в создании поля, вспомогательный характер векторов $\vec{H}$ и $\vec{D}$, природу поляризации и намагничивания, связь между величинами ε и χ, μ и $\varkappa$, выявляет эмпирические «добавки» к исходным постулатам электродинамики. Без такого анализа уравнения Максвелла (15.22) носят чисто феноменологический характер, а соотношение четырех векторов поля между собой далеко не очевидно.

В процессе усреднения уравнений Максвелла—Лоренца для микрополя, в частности, выяснилось, что напряженности электрического поля $\vec{E}$ в веществе (как и в вакууме) ставится в параллель индукция магнитного поля $\vec{B}$; это две силовые характеристики действия поля на заряды, тогда как напряженность магнитного поля $\vec{H}$ аналогична индукции электрического поля $\vec{D}$. Названия векторов в настоящее время отражают не их сущность, а историю развития учения об электромагнетизме. Некогда напряженность магнитного поля определялась как отношение силы, действующей на магнитный заряд, к величине заряда. Поскольку магнитных зарядов в природе не оказалось, утратила свой первоначальный смысл и напряженность.

Для важного частного случая неизменяемой однородной среды μ и ε являются постоянными величинами, т. е. не зависят от координат точки пространства и времени. В таком случае систему уравнений (15.22) можно записать только для двух векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в полной аналогии с системой уравнений (2.1) для вакуума:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{\mu\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{cases} \tag{16.27}$$

Если учесть еще выражение для силы Лоренца, в которое входят только векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то можно видеть, что необходимости в векторах $\vec{H}$ и $\vec{D}$ для однородной среды вообще нет. Можно избежать их использования и в случае неоднородной среды с помощью материальных уравнений (15.24) и (15.26). Применение всех четырех векторов поля оправдано более простым видом уравнений (15.22) по сравнению с уравнениями (16.27) и, по-видимому, традицией.

Сказанное выше позволяет понять, почему при изучении школьного курса электродинамики в последнее время во главу угла ставится поле в вакууме, а характеризуется поле во всех случаях только векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

II. При изучении главы V следует иметь в виду, что она является основополагающей для учения о поле в веществе. В то же время изложение здесь опирается на понятия и уравнения, изученные ранее: они либо видоизменяются, либо уточняются для вещества.

При чтении материала контролируйте себя, отвечая на вопросы, обсуждая назначение и последовательность выводов.

§ 14. Какие заряды называют свободными и связанными? В чем состоит усреднение микрополя? Какое поле мы фиксируем, измеряя напряженность и индукцию? Каковы простейшие модели диэлектрика и проводника?

§ 15. Обсудите постановку вопроса об уравнениях поля в веществе со связанными зарядами. Вспомните о явлении поляризации, изученном в общем курсе физики. Почему поляризованность и плотность связанных зарядов взаимозависимы? В чем состоит явление намагничивания вещества? Обсудите «механизм», соединяющий токи связанных зарядов с поляризацией, намагниченностью. Обсудите сходство и различие таких величин, как диэлектрическая и магнитная восприимчивости вещества. Сопоставьте систему уравнений Максвелла для поля в веществе с вакуумной. Выведите формулы, связывающие $\vec{D}$ с $\vec{E}$, минуя $\vec{P}$ и $\vec{H}$ с $\vec{B}$, минуя $\vec{j}$.

§ 16. Обсудите аналогию между полем в однородной изотропной среде и вакууме. Рассмотрите вопрос об уравнениях поля в потенциа-

лах, пользуясь аналогией со случаем поля в вакууме. Найдите качественно механизмы, приводящие к ослаблению электрического поля некоторой системы зарядов в веществе и к усилению магнитного поля. Запишите формулы граничных условий, изменяя нумерацию сред. Как это повлияет на взаимосвязь определяющих формулы направлений? Выполните целиком вывод закона изменения и сохранения энергии поля в веществе.

Глава VI
ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Мы приступаем к обсуждению частных проблем электродинамики поля в веществе. Их классификация связана с соответствующими частными случаями электромагнитных полей; изучаются стационарные и квазистационарные поля, электромагнитные волны в веществе. Наличие вещества и особенно свободных зарядов в веществе приводит к значительным отличиям электромагнитных полей и методов их расчета от изученных ранее. Важнейшее новое явление в веществе — возникновение электрического тока, порождаемого электрическим полем. В свою очередь ток вызывает магнитное поле, а изменения последнего — явление электромагнитной индукции.

В данной главе изложены основные вопросы электростатики — учения о статическом электромагнитном поле в системе заряженных и нейтральных диэлектрических и проводящих тел. При этом введенные ранее в главе II для стационарного поля в вакууме формулы, соотношения, величины используются как известные.

§ 17. Электростатика диэлектриков

17.1. Электростатическое поле в однородном диэлектрике. Допустим существование однородной среды из диэлектрика, заполняющего пространство. (Такой средой, в частности, является воздух.) В диэлектриках могут иметь место различные конфигурации свободных зарядов, описываемые плотностью $\varrho(\vec{r})$.

В статическом случае векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не зависят от времени, а заряды, создавшие поле, неподвижны (токов нет, так как по диэлектрику заряды не перемещаются). Система уравнений Максвелла (15.22) распадается на две независимые подсистемы:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\varrho,\ \vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{17.1}$$

и

$$\operatorname{rot}\vec{H}=0,\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}. \tag{17.2}$$

Это значит, что в данном случае может быть одно электростати-

ческое поле, описывающееся уравнениями (17.1), из которых основным является второе –

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho. \tag{17.3}$$

В интегральной форме оно имеет вид теоремы Гаусса для поля в веществе:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q. \tag{17.4}$$

Уравнения (17.3) и (17.4) только постоянным множителем ε отличаются от соответствующих вакуумных. Поэтому все выводы § 6 о свойствах стационарного поля в вакууме остаются в силе и для однородного диэлектрика. Только везде, где в формулу электростатического поля в вакууме входят постоянные ε_0 или k, необходимо произвести замену: ε_0 на $\varepsilon\varepsilon_0$ и k на $\frac{k}{\varepsilon}$. Так, например, для потенциала и напряженности поля точечного заряда на основании формул (6.11) и (6.10) имеем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{kq}{\varepsilon r}; \tag{17.5}$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \tag{17.6}$$

В этом случае имеется готовое решение для потенциала поля, созданного ограниченной по размерам системой зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{\varepsilon} \int\limits_{V_0} \frac{\varrho(\vec{r}_0)}{r'} dV_0 + \frac{k}{\varepsilon} \int\limits_{S_0} \frac{\sigma(\vec{r}_0)}{r'} dS_0 + \frac{k}{\varepsilon} \int\limits_{L_0} \frac{\tau(\vec{r}_0)}{r'} dl_0. \tag{17.7}$$

Это выражение учитывает все возможные виды распределения зарядов в диэлектрике.

Повторяются для однородной среды формулы потенциала и напряженности в дипольном приближении и т. д.

Остановимся на законе Кулона (2.15) и формуле для энергии электростатического поля (7.15). Закон Кулона для взаимодействия двух зарядов в однородной среде имеет вид

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{k}{\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}, \tag{17.8}$$

т. е. сила взаимодействия точечных зарядов в диэлектрике уменьшается в ε раз (во столько раз, какова диэлектрическая проницаемость среды).

Формула для плотности энергии

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \tag{17.9}$$

свидетельствует об увеличении энергии в ε раз при заданной напряженности. Очевидно, что для создания поля напряженностью $\vec{E}$ в

веществе требуется иная система зарядов, нежели для такого же поля в вакууме. Если же рассмотреть некоторую заданную систему, то энергия ее согласно (7.11) подсчитывается по формуле

$$W = \frac{k}{2\varepsilon} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{17.10}$$

т. е. уменьшается в веществе в ε раз.

Рассмотренные случаи полей показывают, что вместо вектора $\vec{E}$ при наличии среды удобнее использовать вектор индукции электрического поля $\vec{D}$. Поле вектора $\vec{D}$ определяется только свободными зарядами, и среду в процессе расчета учитывать не нужно. Искомая напряженность $\vec{E}$ вычисляется на последнем этапе по материальному уравнению (17.1).

Особенно наглядна роль вектора $\vec{D}$ для неоднородной, но непрерывной среды. При расчете $\vec{D}$ используется уравнение (17.3), или формула (17.4), или, наконец, возможен переход к уравнению для потенциала

$$\Delta\varphi_D = -\varrho, \tag{17.11}$$

где

$$-\operatorname{grad}\varphi_D = \vec{D}, \tag{17.12}$$

что исключает из рассмотрения $\varepsilon(\vec{r})$, упрощая уравнения для напряженности $\vec{E}$. Окончательный результат получается с помощью формул (17.1):

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Пример 17.1. **Расчет поля в случае неоднородной среды.**

Найдем напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом в диэлектрической среде. Проницаемость среды уменьшается при удалении от заряда по формуле

$$\varepsilon = ae^{-\frac{r}{R}},$$

где a и R – постоянные величины.

Для индукции $\vec{D}$ имеем согласно выражению (17.1) уравнение

$$\operatorname{div}\vec{D} = q\delta(\vec{r}),$$

которое можно решить с помощью теоремы Гаусса или переходя к потенциалу. Изберем для полноты иллюстрации второй путь. У нас

$$\Delta\varphi_D = -q\,\delta(\vec{r}).$$

Решение такого уравнения находили ранее:

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r}.$$

Переходим к индукции: $\vec{D} = -\operatorname{grad}\varphi_D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.

Наконец, находим напряженность:

$$\vec{E} = ke^{\frac{r}{R}}\frac{q}{ar^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Но все эти выводы, по существу, носят тривиальный характер и мало что прибавляют к анализу поля, проделанному ранее для вакуума. Иное положение, когда диэлектрическая среда кусочно-неоднородна: имеют место границы, отделяющие один диэлектрик от другого, границы между веществом и вакуумом, проводящими телами и диэлектрической средой и т. д. В таких случаях задачи электростатики диэлектриков приобретают самостоятельное значение.

17.2. Электростатическое поле при наличии границ раздела в среде и разрывов непрерывности плотности зарядов. Основная задача электростатики – рассчитать поле системы заряженных и нейтральных тел. В этом случае имеют место конечные разрывы непрерывности функций $\varepsilon(\vec{r})$ и $\varrho(\vec{r})$ на границах раздела вещественных сред, соответственно терпят разрыв векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

Как указывалось, основным уравнением электростатики является уравнение (17.3). Запишем его через потенциал согласно формулам (17.11) и (17.12) для каждой области:

$$\Delta\varphi_D = -\varrho. \tag{17.13}$$

(В пределах каждой области ε обычно постоянно, так что можно пользоваться введенным ранее потенциалом – определение (16.2):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi -$$

и решать уравнения Пуассона вида

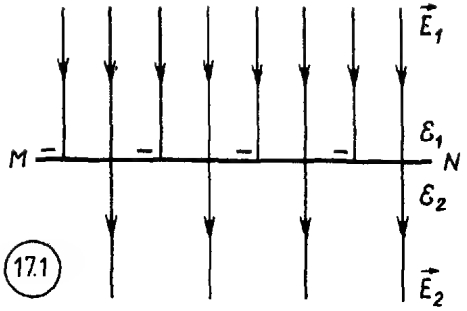
$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

т. е. решать задачу сразу для $\vec{E}$, минуя $\vec{D}$.)

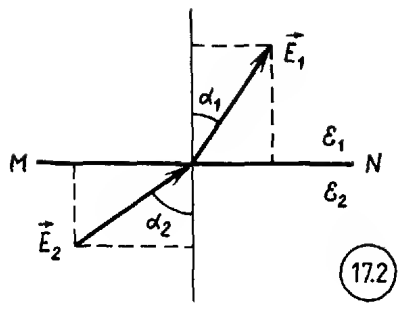
Уравнения (17.13) решаются для каждой области. Найденные для всех областей решения «сшиваются» с помощью граничных условий. Сообщаем, что потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе и на границах раздела двух сред; это необходимо для однозначного определения векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$. (Исключение представляют так называемые двойные электрические слои, которые мы не рассматриваем.) Что касается граничных условий для $\vec{D}$ и $\vec{E}$, то они изучены ранее (см. табл. 1).

Таковы постановка и основной путь решения многих задач электростатики, причем в систему тел могут входить не только тела из диэлектрика, но и из проводника. (Особенности поля в проводнике рассматриваются ниже.)

Из уравнений (17.13) следует, что для нахождения потенциала



17.1



17.2

поля в веществе нужно знать лишь конфигурацию системы свободных зарядов. Но можно установить и распределение связанных зарядов в диэлектрике после определения поля в нем. Для этого следует пользоваться формулами (15.7) и (15.21)

$$\varrho_{\text{св. з}} = -\operatorname{div}\vec{P},\ \vec{P} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}.$$

Эти формулы не позволяют найти поверхностную плотность связанных зарядов на границах раздела диэлектриков. Для нахождения последней можно использовать граничные условия для вектора $\vec{P}$. При этом полностью повторится вывод граничного условия для нормальной составляющей вектора $\vec{D}$ в § 16, п. 16.2. Окончательный результат будет таков:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{\text{св. з}}, \tag{17.14}$$

что и завершает вопрос о распределении связанных зарядов.

Пример 17.2. **Электростатическое поле на границе раздела двух однородных диэлектриков.**

С помощью формул (16.9) и (16.17) имеем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,\ E_{2t} - E_{1t} = 0.$$

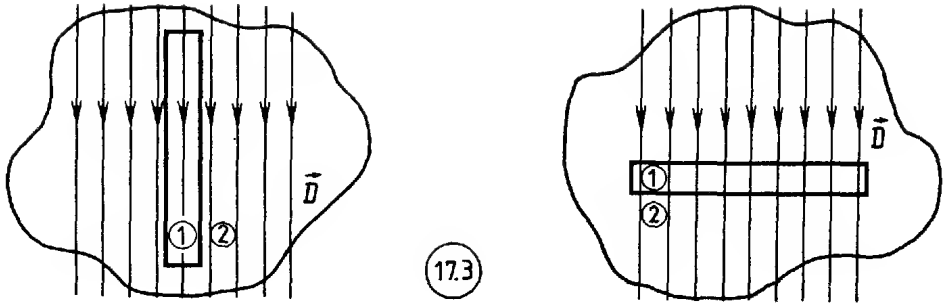
Нормальная составляющая напряженности электрического поля терпит разрыв. Что касается тангенциальной составляющей, то она непрерывна. Рассмотрим незаряженную поверхность. Проводя линии напряженности поля с густотой, пропорциональной модулю $\vec{E}$, замечаем, что число линий, перпендикулярных к границе, изменяется в отношении $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Очевидно, что это объясняется возникновением поверхностного связанного заряда (рис. 17.1). Учитывая поведение обеих составляющих вектора $\vec{E}$ на незаряженной поверхности, замечаем, что линии напряженности преломляются согласно соотношению (рис. 17.2)

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Пример 17.3. **Измерение векторов электростатического поля в веществе.**

В однородной протяженной диэлектрической среде создано электростатическое поле. Прорежем узкую длинную щель вдоль силовых линий (рис. 17.3). В таком случае с помощью граничного условия (16.17) заключаем, что

$$E_2 = E_1,$$



т. е. напряженность поля в этой щели равна напряженности в диэлектрике, чем и можно воспользоваться для непосредственного ее измерения.

Если щель прорезана перпендикулярно линиям поля, то по формуле (16.9) имеем

$$D_2 = D_1.$$

Щель заполнена воздухом, для которого $\varepsilon \approx 1$, поэтому $D_2 = \varepsilon_0 E_2$. Отсюда

$$D_1 = \varepsilon_0 E_2.$$

Поскольку измерения характеристик поля основаны на его силовом действии, а в выражение электрической составляющей силы Лоренца входит напряженность, то $\vec{E}_2$ может быть непосредственно измерена, а вместе с ней определена и индукция поля в веществе.

Пример 17.4. **Влияние поляризации вещества на напряженность поля.**

Возьмем плоскопараллельную пластинку и расположим перпендикулярно вектору $\vec{D}$ электростатического поля. Вследствие поляризации на пластинке возникают поверхностные связанные заряды, создающие дополнительное поле. Пользуясь граничным условием (16.9), записываем $\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \vec{D}$ (рис. 17.4). Отсюда следует, что $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{E}_2}{\varepsilon}$ – поле внутри пластинки ослабло в ε раз. Если воспользоваться еще формулой (15.21), которая запишется для пластинки в виде

$$\varepsilon_0 \vec{E}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P},$$

то имеем

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда видно, как связано уменьшение поля в веществе с вектором поляризации.

Пример 17.5. **Расчет поля в диэлектрике с границей раздела.**

Пусть шар радиусом a из однородного диэлектрика с проницаемостью ε_1 заряжен с постоянной плотностью ϱ. Он находится в однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε_2. Требуется найти поле во всем пространстве.

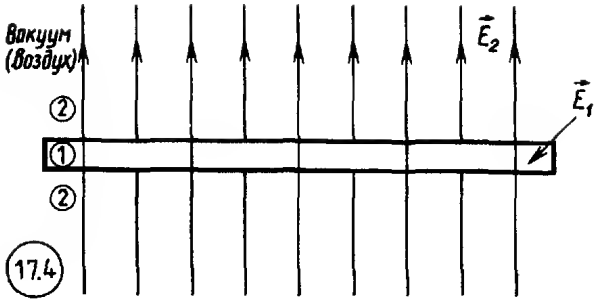
Решим задачу, записывая исходные уравнения поля для обеих сред в потенциалах (см. (17.13)):

$$\Delta\varphi_1 = -\varrho,$$
$$\Delta\varphi_2 = 0.$$

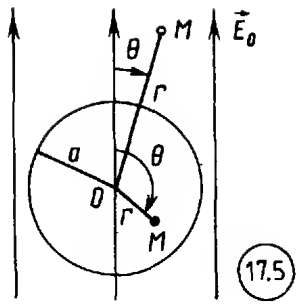
Далее можно использовать решения аналогичных уравнений, найденные в примере 6.2:

$$\varphi_1 = -\frac{\varrho r^2}{6},$$

$$\varphi_2 = -\frac{A_2}{r} + B_2.$$



17.4



17.5

Постоянные интегрирования A_2 и B_2 определяем, используя условие непрерывности потенциала и его производной на границе раздела:

$$A_2 = -\frac{\varrho a^3}{3}, \qquad B_2 = -\frac{\varrho a^2}{2}.$$

Переходя к индукции поля, получаем

$$\vec{D}_1 = \frac{\varrho r}{3}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_r}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{D}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho$ — заряд всего шара, а $Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$ — заряд внутри шара радиусом r.

Индукция непрерывна на границе раздела двух диэлектриков. Находя напряженность поля, имеем

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\frac{Q_r}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Ее нормальная составляющая при $r = a$ терпит разрыв, соответствующий граничному условию:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Пример 17.6. **Расчет поля при наличии диэлектрических тел.**

Шар радиусом a из однородного диэлектрика с проницаемостью ε внесен в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$. Требуется найти поле после внесения шара. (Поле изменилось вследствие поляризации шара.)

Задачу решаем с помощью уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$, так как свободных зарядов нет. Выберем сферическую систему координат, а ось Oz направим по вектору $\vec{E}_0$ (рис. 17.5). В сферических координатах уравнение приводится к виду

$$r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = 0. \qquad (1)$$

(Учтено, что вследствие осевой симметрии условий задачи потенциал от азимутального угла α не зависит.) Ищем решение уравнения по методу разделения переменных:

$$\varphi(r, \vartheta) = R(r)\,T(\vartheta). \qquad (2)$$

Послс подстановки (2) в уравнение (1) получаем два уравнения

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-\lambda R=0; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dT}{d\vartheta}\right)+\lambda T=0, \tag{4}$$

где λ – параметр разделения переменных. Подстановкой убеждаемся, что функция

$$T=\cos\vartheta \tag{5}$$

служит решением уравнения (4) при значении параметра $\lambda=2$. Уравнение (3) принимает вид

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-2R=0. \tag{6}$$

Используя подстановку $r=e^z$, переводим уравнение (6) в обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2R}{dz^2}+\frac{dR}{dz}-2R=0. \tag{7}$$

Находим общий интеграл уравнения (7) в виде $R=C_1e^z+C_2e^{-2z}$ или, возвращаясь к переменной r, в виде $R=C_1r+\dfrac{C_2}{r^2}$

Окончательно решение уравнения (1) записываем в виде

$$\varphi=\left(C_1r+\frac{C_2}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{8}$$

Константы C_1 и C_2 следует определить, пользуясь граничными условиями. Для внешней области (2) вдали от шара поле остается однородным, так что

$$\vec{E}_2|_{r\to\infty}=\vec{E}_0,$$

откуда

$$\varphi_2|_{r\to\infty}=-\vec{E}_0\vec{r}=-E_0r\cos\vartheta,$$
$$C_1=E_0.$$

Формула для потенциала вне шара принимает вид

$$\varphi_2=\left(-E_0r+\frac{a}{r^2}\right)\cos\vartheta, \tag{9}$$

где a – константа, введенная вместо C_2.

Внутри шара потенциал должен быть конечной величиной, т. е. $C_2=0$. Поэтому

$$\varphi_1=\beta\vec{E}_0\vec{r}=\beta E_0r\cos\vartheta, \tag{10}$$

где $\beta=\dfrac{C_1}{E_0}$ введено ради удобства выкладки.

Используя теперь условие непрерывности потенциала на границе двух сред при $r=a$ и граничное условие (16.11) для напряженности поля, имеем

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a),$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a},$$

или подробно:

$$\beta E_0a=-E_0a+\frac{a}{a^2}; \tag{11}$$

$$\varepsilon\beta E_0 = -E_0 - \frac{2\alpha}{a^3} \tag{12}$$

Решая алгебраическую систему (11) – (12), получаем значения α и β.

$$\alpha = a^3 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \quad \beta = -\frac{3}{\varepsilon + 2},$$

после чего можем записать потенциал поля в окончательной форме:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 r \cos\vartheta; \tag{13}$$

$$\varphi_2 = E_0 \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)\cos\vartheta. \tag{14}$$

Найденные потенциалы φ_1 и φ_2 дают ответ на поставленную задачу – по ним определяется напряженность поля:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

(Вычисления напряженностей мы предоставляем читателю.)

Весьма интересно придать потенциалам (13) и (14) иную форму, вводя в рассмотрение вектор

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0,$$

оказывающийся вектором поляризации шара в данном случае. После подстановки получаем

$$\varphi_1 = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{4\pi r^3}{3}\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3},$$

$$\varphi_2 = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{4\pi a^3}{3}\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3}$$

Но эти формулы в явном виде представляют поле как суперпозицию исходного поля $\vec{E}_0$ и поля однородного поляризованного шара с дипольным моментом $\vec{P}V$ (внутри шара берется $V' = \frac{4\pi r^3}{3}$).

Можно найти и плотность связанных зарядов на поверхности шара, если воспользоваться формулой (17.14). Поскольку

$$E_r = E\cos\vartheta,$$

то

$$\sigma_{\text{св з}} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}E_0\cos\vartheta.$$

§ 18. Проводники в электростатическом поле

18.1. Уединенный проводник. Электроемкость. Еще из школьного курса физики известно, что проводник, помещенный в электростатическое поле, заряжается по поверхности. В отсутствии поля

плотность свободных зарядов в проводнике равна нулю, так как в любом макроскопическом объеме число положительных и отрицательных зарядов одинаково.

Это, однако, не означает, что свободных зарядов нет: в проводнике имеется очень большое количество утерявших связь с ядрами электронов. Под действием внешнего поля $\vec{E}_в$ они движутся до поверхности проводника, создавая здесь отличную от нуля плотность заряда σ. Соответственно возникает поле этих зарядов с напряженностью $\vec{E}'$. Движение зарядов продолжается до тех пор, пока поле внутри проводника не исчезнет, т. е. будет

$$\vec{E} = \vec{E}_в + \vec{E}' = 0.$$

В таком случае из формул (17.1) следует, что $\varrho = 0$, т. е. объемная плотность свободных зарядов внутри проводника равна нулю.

Таким образом, речь идет о случаях, когда внутренних свободных зарядов достаточно для создания напряженности $\vec{E}' = -\vec{E}_в$. Впрочем, это выполняется практически всегда.

Этот вывод справедлив в статическом случае и для заряженного проводника: все помещенные на него заряды располагаются на поверхности.

Возможно сопоставление с однородным диэлектриком в однородном электростатическом поле: поляризация приводит к образованию только поверхностных связанных зарядов. Но если в диэлектрике поле ослаблено по сравнению с вакуумом в ε раз, то в проводнике оно вообще отсутствует, т. е. можно формально считать для проводника $\varepsilon = \infty$.

Итак, все нескомпенсированные свободные заряды расположены на поверхности проводника, они образуют тонкий электрический слой порядка размеров атома. Из граничного условия (16.10) вытекает для проводника важное заключение:

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_n = \sigma, \tag{18.1}$$

которое дает связь напряженности поля снаружи на поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда. Тангенциальная составляющая напряженности поля вне проводящего тела в силу граничного условия (16.17) равна нулю, так как напряженность поля внутри проводника равна нулю:

$$E_t = 0. \tag{18.2}$$

Подводя итог, заключаем: линии напряженности электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника и начинаются или оканчиваются на зарядах, расположенных на этой поверхности:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{n}, \tag{18.3}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник, а $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности (рис. 18.1).

Вследствие того, что внутри проводника напряженность равна нулю, потенциал всех точек проводника один и тот же. (Это непосредственно видно из формулы связи потенциала и напряженности $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$.) Таким образом, можно говорить о потенциале всего проводящего тела (вместо потенциала точки поля).

Запишем выражение (17.7) для потенциала системы зарядов, распределенных по поверхности проводника, учитывая, что проводник окружен однородным диэлектриком:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{\varepsilon} \oint_S \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dS_0$$

Поместим начало координат в точке наблюдения M. Тогда формула упростится:

$$\varphi(0) = \frac{k}{\varepsilon} \oint_S \frac{\sigma(\vec{r})}{r} dS. \qquad (18.4)$$

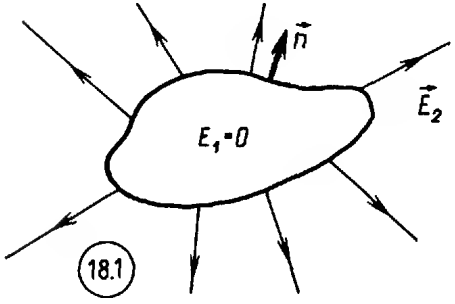
Если точка наблюдения находится в пределах проводника, то должно получиться значение φ, не зависящее от выбора точки. Это приводит к пропорциональности потенциала φ заряду проводника. Введем определение новой физической величины – *электроемкости проводника* – формулой

$$\varphi = \frac{Q}{C}, \qquad (18.5)$$

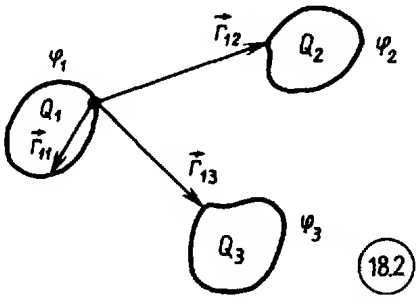
где Q – заряд проводника, а C – его электроемкость. Из соображений размерности следует

$$C = \frac{\varepsilon}{k} \langle r \rangle. \qquad (18.6)$$

В формуле (18.6) $\langle r \rangle$ – величина с размерностью длины. Этот параметр имеет смысл некоторых средних линейных размеров, характе-



18.1



18.2

ризующих тело, так как расстояния до точек на поверхности проводника входят в интеграл (18.4). Конечно, электроемкость не зависит от величины заряда на проводнике, а определяется согласно формуле (18.6) размерами, формой проводника и окружающим проводник диэлектриком.

Для практического определения электроемкости следует пользоваться формулой (18.5). С помощью же формулы (18.6) расчет электроемкости можно провести только для тела простейшей формы. Пусть шарообразный проводник находится в вакууме, тогда $\varepsilon = 1$; заряд распределяется по поверхности равномерно, а $\langle r \rangle = R$, т. е.

$$C = \frac{R}{k}.$$

Единица электроемкости — 1 фарад (Ф):

$$1\ \Phi = 1\ \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2.$$

Фарад — это емкость шара радиусом $9 \cdot 10^9$ м.

18.2*. Система проводников. При наличии в пространстве нескольких заряженных проводников потенциал каждого из них зависит от расположения зарядов в пространстве, т. е. от расстояний до других проводников, их формы и размеров, от диэлектрической проницаемости среды, разделяющей проводники. Чтобы непосредственно убедиться в этом, рассмотрим систему проводников, помещенных в однородный диэлектрик (рис. 18.2), и применим для нахождения потенциала одного из проводников формулу (18.4):

$$\varphi_i = \frac{k}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} \oint_{S_j} \frac{\sigma(\vec{r}_{ij})}{r_{ij}} dS_j. \qquad (18.7)$$

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем параграфе, вместо формулы (18.7) можно записать:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} Q_j, \qquad (18.8)$$

где α_{ij} постоянные коэффициенты. Все $\alpha_{ij} \geq 0$, причем $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (теорема взаимности, доказательство которой мы опускаем).

Решим систему алгебраических уравнений (18.8) относительно зарядов, в результате чего получим по формулам линейной алгебры

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \varphi_j. \qquad (18.9)$$

Здесь

$$C_{ij} = \frac{A_{ij}}{D},$$

где D — определитель матрицы коэффициентов α_{ij}; A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу α_{ij}.

Коэффициенты C_{ij} зависят от формы и размеров тел, их взаим-

ного расположения, диэлектрических свойств среды. Величины C_{ii} называются *коэффициентами емкости*, а C_{ij} – *коэффициентами индукции*. Можно показать, что $C_{ij} = C_{ji}$. Кроме того, оказывается, что $C_{ii} > 0$, $C_{ij} \leq 0$.

Пример 18.1. **Система двух проводников – конденсатор.**

Исследуем систему из двух проводников при условии, что заряды на них равны по модулю и противоположны по знаку. Согласно формуле (18.9)

$$-Q = C_{1,1}\varphi_1 + C_{1,2}\varphi_2; \tag{1}$$

$$Q = C_{2,1}\varphi_1 + C_{2,2}\varphi_2. \tag{2}$$

Положим $\varphi_2 = 0$. Складывая равенства (1) и (2) и учитывая, что $C_{1,2} = C_{2,1}$, получим

$$C_{1,1} = -C_{1,2}.$$

Аналогично: если выбрать $\varphi_1 = 0$, то окажется

$$C_{2,2} = -C_{1,2},$$

откуда следует, что $C_{1,1} = C_{2,2}$. Таким образом,

$$C_{1,1} = C_{2,2} = -C_{1,2} = -C_{2,1} = C.$$

Система, состоящая из двух проводников с равными по модулю зарядами, называется конденсатором. Как из равенства (1), так и из равенства (2) для конденсатора следует

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{18.10}$$

Величину C называют емкостью конденсатора. Всегда $C > 0$. Поэтому в формуле (18.10) предполагается, что φ_2 – потенциал той обкладки, заряд которой положителен. Конденсатор может быть изолирован от влияния других тел в пространстве, т. е. емкость определяется только параметрами самого конденсатора.

Пример 18.2. **Расчет поля при наличии в нем проводящего тела.**

Рассмотрим на простом примере решение задачи электростатики с проводящим телом. Для этого воспользуемся данными примера 17.6, но вместо шара из диэлектрика поместим в однородное поле проводящий шар.

Вне шара используем решение уравнения Лапласа, найденное в задаче 17.6:

$$\varphi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{1}$$

Постоянные коэффициенты C_1 и C_2 следует определить из граничных условий. Вдали от шара

$$\vec{E}\,|_{r\to\infty} = \vec{E}_0,$$

откуда

$$\varphi\,|_{r\to\infty} = -\vec{E}_0\vec{r},$$

$$-C_1 = E_0. \tag{2}$$

Потенциал проводника должен быть конечной постоянной величиной. На поверхности шара

$$\varphi = \left(C_1 a + \frac{C_2}{a^2}\right)\cos\vartheta = \text{const},$$

что дает

$$C_1 a + \frac{C_2}{a^2} = 0,$$

откуда $$C_2 = E_0 a^3 \tag{3}$$

Итак, потенциал поля определяется формулой

$$\varphi = E_0 \left(-r + \frac{a_3}{r^2}\right)\cos\vartheta \tag{4}$$

Нетрудно найти и составляющие напряженности поля В сферической системе координат

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\vartheta,$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\sin\vartheta,$$

$$E = E_0\sqrt{\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)^2\cos^2\vartheta + \left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)^2\sin^2\vartheta} \tag{5}$$

При $r = a$, углах $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ имеем $E = E_{\max} = 3E_0$ На «экваторе» шара $E = E_{\min} = 0$ Заряд распределяется по поверхности шара с плотностью

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta \tag{6}$$

(Следует учесть, что проводник находится в вакууме)

Осталось заметить, что эти результаты мы могли бы получить, не решая задачу для проводника вновь, а используя потенциал поля, найденный в примере 17 6, и полагая в формуле (14) $\varepsilon = \infty$

18.3. Энергия электростатического поля как энергия взаимодействия системы тел. Запишем выражение для энергии электростатического поля в веществе, полученное из общей формулы (16.22):

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\,\vec{E}\,dV. \tag{18 11}$$

Пусть в однородной диэлектрической среде имеется некоторая система однородных тел конечных размеров, на которых и сосредоточены электрические заряды. В таком случае все пространство заполнено кусочно-однородным веществом.

Преобразуем формулу (18.11), вводя скалярный потенциал вместо напряженности и используя тождество (см. П. II, 15). Получаем

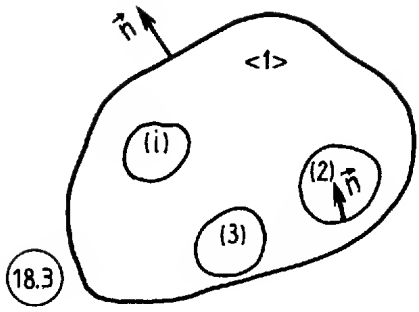
$$-\vec{D}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{D} - \mathrm{div}\,(\varphi\,\vec{D}).$$

Применяя уравнения (17.1), находим

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\varrho dV - \frac{1}{2}\int \mathrm{div}\,(\varphi\vec{D})\,dV.$$

Далее запишем интегралы, подразделяя область интегрирования на части в соответствии с рисунком 18.3, причем область (1) охватывает всю рассматриваемую среду, а области (2), (3) и т. д.— тела в ней:

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_1}\varphi\varrho dV + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int_{V_i}\varphi\varrho dV - \frac{1}{2}\int_{V_1}\mathrm{div}\,(\varphi\vec{D})\,dV - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int_{V_i}\mathrm{div}\,(\varphi\vec{D})\,dV. \tag{18.12}$$



Первое слагаемое в формуле (18.12) равно нулю, так как заряды расположены только на телах. Третье слагаемое представим в виде суммы поверхностных интегралов:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{V_1}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV=-\frac{1}{2}\oint\limits_{S_1}\varphi D_n dS-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\oint\limits_{S_i}\varphi D_n dS.$$

Поверхностный интеграл по внешней границе обращается в нуль, если поверхность S_1 сдвинуть в бесконечность, т. е. учесть всю протяженность поля.

Объемные интегралы вида

$$\int\limits_{V_i}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV$$

также сводятся к поверхностным

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\int\limits_{V_i}\operatorname{div}(\varphi\vec{D})\,dV=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\oint\limits_{S_i}\varphi D_n dS.$$

(Знак сменился потому, что выбранная нормаль $\vec{n}_i$ для всех областей $i=2,\ 3,\ \ldots,\ N$ является внутренней.) При подстановке полученных выражений в формулу (18.12) сгруппируем поверхностные интегралы по индексу области. Например, для области (2) получим член

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{S_2}\varphi\,(D_{n_2}-D_{n_1})\,dS,$$

который с помощью граничного условия (16.9) преобразуется в выражение

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{S_2}\varphi\sigma dS.$$

В итоге формула для энергии поля системы заряженных тел в среде приобретает вид

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k}\int\limits_{V_k}\varphi\varrho dV+\frac{1}{2}\sum_{k}\oint\limits_{S_k}\varphi\sigma dS, \qquad (18.13)$$

где суммирование производится по всем заряженным телам системы. Полученный вывод замечателен тем, что сводит энергию электростатического поля заряженных тел к энергии системы свободных зарядов в поле с потенциалом $\varphi(\vec{r})$. В этом отношении формула (18.13) аналогична формуле энергии системы зарядов в вакууме (7.14). Однако теперь связанные заряды, входящие в состав вещества, учитываются в значениях потенциалов, уменьшая потенциал, а вместе с ним и энергию системы (см. § 17, п. 17.1).

Формула (18.13) подходит к диэлектрическим телам, на которых свободный заряд может быть распределен как по объему, так и по поверхности. (Если в системе есть заряженные нити, то следует учесть также слагаемые вида $\int\limits_{L_k} \varphi \tau dl$.)

Система заряженных проводников в вакууме или диэлектрической среде за счет распределенной по пространству энергии электростатического поля обладает энергией, которую можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия заряженных проводников. В самом деле, если воспользоваться формулой энергии системы заряженных тел (18.13) и учесть, что заряды распределены только по поверхностям проводников, а потенциалы каждого проводника одинаковы во всех точках, то сразу получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k \oint\limits_{S_k} \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k Q_k. \tag{18.14}$$

Формально (18.14) совпадает с формулой (7.10) — выражением для энергии системы точечных зарядов в вакууме.

Если использовать выражение для зарядов проводника через коэффициенты емкости и индукции (18.9), то формула (18.14) для энергии системы проводников примет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \sum_{k=1}^{N} C_{ik} \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} C_{ik} \varphi_i \varphi_k. \tag{18.15}$$

Формула (18.15) для уединенного проводника приводит к известному из курса общей физики выражению

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}. \tag{18.15-а}$$

То же выражение мы получим для конденсатора, где в качестве φ фигурирует разность потенциалов между обкладками, а C — емкость.

18.4. Силы, действующие на тела в электростатическом поле. Сила, действующая на (твердое) тело в электрическом поле, опреде-

ляется равнодействующей сил, действующих на свободные и связанные заряды в элементах объема тела:

$$\vec{F} = \int_V \vec{E}\,(\varrho + \varrho_{\text{св. э}})\,dV. \tag{18.16}$$

В § 7, п. 7.2 рассмотрены силы, действующие на систему зарядов в поле. Сейчас мы найдем силы, действующие в электрическом поле на тела и вещественную среду, учитывая специфику распределения зарядов в диэлектриках и проводниках.

В твердом диэлектрике электрические заряды жестко связаны. Поэтому можно применить формулу (7.8)

$$\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\,\vec{E},$$

где $\vec{p}$ – дипольный момент системы, а $\vec{E}$ – напряженность поля. Для незаряженного, но поляризованного диэлектрика дипольный момент элементарного объема dV определяется формулой (15.1)

$$d\vec{p} = \vec{P}dV,$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризации вещества. Для элементарной силы получим

$$d\vec{F} = (\vec{P}\,\nabla)\,\vec{E}dV.$$

Учитывая материальное уравнение (15.8), имеем

$$d\vec{F} = \chi\varepsilon_0\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E}dV.$$

Учитывая тождество (см. П. II, 29) и уравнения поля (17.1), можно показать, что

$$\operatorname{grad}(\vec{E}\,\vec{E}) = 2\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E} + 2\,[\vec{E}\operatorname{rot}\vec{E}] = 2\,(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{E}.$$

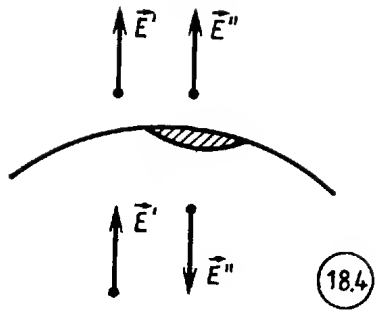
Тогда для плотности силы $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$ получим

$$\vec{f} = \frac{\chi\varepsilon_0}{2}\operatorname{grad}E^2. \tag{18.17}$$

Характерно, что направление силы не зависит от направления силовых линий; она направлена всегда в сторону возрастания модуля напряженности поля, т. е. диэлектрик как бы втягивается в поле.

Найдем теперь силу, действующую на проводник, помещенный в электрическое поле. Так как заряды сосредоточены на поверхности проводника, то соответственно и поле действует на поверхность проводника. Напряженность поля на поверхности проводника выражена формулой (18.3)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}.$$



Однако для расчета силы, действующей на некоторую малую площадку поверхности проводника, нужно знать не эту величину, а напряженность поля $\vec{E}'$, созданного всеми зарядами, за вычетом заряда данной площадки. Применим следующий прием: мысленно вырежем некоторую площадку (рис. 18.4) вместе с зарядом на ней и исключим действие ее заряда на поле. Тогда в данном месте при переходе границы тела скачка напряженности не будет: напряженность $\vec{E}'$ окажется непрерывной величиной. Пусть площадка создает поле напряженностью $\vec{E}''$, как показано на рисунке. Внутри проводника $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 0$, т. е. $\vec{E}'' = -\vec{E}'$; следовательно, при наличии площадки снаружи тела $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 2\vec{E}'$, а $\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{2}$.

Вычислим элементарную силу, действующую на площадку dS:

$$d\vec{F} = \vec{E}'\sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}dS.$$

Для плотности силы имеем выражение

$$\vec{f}_{\text{пов}} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}. \qquad (18.18)$$

Его можно преобразовать, принимая в расчет формулу (18.3). Получаем

$$f_{\text{пов}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad (18.19)$$

т. е. модуль плотности силы равен плотности энергии поля у поверхности проводника.

Методические указания и рекомендации

I. Электростатическое поле является наиболее подробно изучаемым из всей электродинамики объектом в курсе средней школы и в курсе общей физики. Для него вводятся основные характеристики — напряженность и потенциал, рассматривается теорема Гаусса и т. д. Кроме того, анализируется явление поляризации, электростатической индукции.

В нашем курсе задача электростатики по нахождению поля системы заряженных тел оказалась основной; электростатическое поле как таковое рассматривается как частный случай проявления электромагнитного поля, явление и закономерности поляризации вещества изложены в предыдущей главе. В то же время рамки курса не позволяют вникать в подробности и различные частные методы решения множества электростатических задач.

II. При изучении главы рекомендуется сосредоточить внимание на особенностях поля в веществе, на разборе примеров по расчету поля. Самостоятельная работа может быть организована как решение задач из упражнений к главе и имеющихся задачников по теоретической физике, например [5–6].

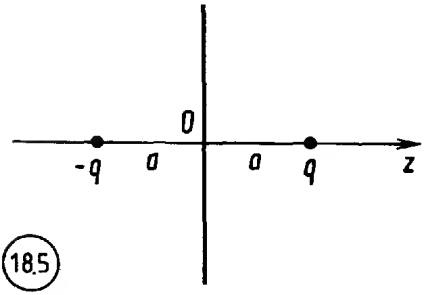
Упражнения

1. Вычислить энергию поля, созданного в однородном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε шаром радиусом a, равномерно заряженным с плотностью ϱ.

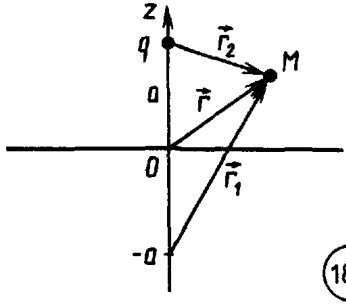
Ответ: $W = \dfrac{3kQ^2}{5a\varepsilon}$, где Q – заряд шара.

2. Точечный заряд q находится на расстоянии a от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность наведенных на проводнике зарядов.

Поверхность проводника в искомом поле является эквипотенциальной поверхностью. Любая плоскость будет эквипотенциальной поверхностью, если симметрично относительно нее расположить два заряда q и $-q$ (в отсутствие проводника). Положение данного заряда q и граничное условие на поверхности проводника однозначно определяют поле в правом полупространстве. Это означает, что проводник с наведенным поверхностным зарядом создает такое же поле в правом полупространстве, что и точечный заряд величиной $-q$, расположенный в точке, где находилось бы изображение заряда q, если бы поверхность проводника была зеркальной (рис. 18.5). На этом



18.5



18.6

основан метод «изображений». Устраняя проводник, поместим в точку $(0, 0, -a)$ заряд величиной $-q$. Введем цилиндрическую систему координат с осью Oz, проходящей через оба заряда.

При $z \geq 0$

$$\varphi(r, z) = \frac{kq}{\sqrt{r^2 + (a-z)^2}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + (a+z)^2}},$$

тогда

$$E_z = -\left\{\frac{kq(a-z)}{(r^2 + z^2 + a^2 - 2za)^{3/2}} + \frac{kq(a+z)}{(r^2 + z^2 + a^2 + 2za)^{3/2}}\right\}.$$

Вычисляя E_z на поверхности, определяем и плотность зарядов.

Ответ: $\sigma = -\frac{2\varepsilon_0 kqa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$.

3. Определить силу, с которой точечный заряд q притягивается к бесконечной проводящей поверхности (см. задачу 2).

Ответ: $F = \frac{kq^2}{4a^2}$.

4. Точечный заряд находится в вакууме на расстоянии a от плоской поверхности однородного диэлектрика, заполняющего все нижнее полупространство. Показать, что поле описывается выражениями:

$$\varphi_2(\vec{r}) = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_1}\right), \quad (z \geq 0); \tag{1}$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_2}, \quad (z \leq 0), \tag{2}$$

где r_2 и r_1 – расстояния до точки $M(\vec{r})$ от точек $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$ (рис. 18.6).

Указание. Потенциалы являются решениями уравнений

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (z \geq 0),$$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad (z \leq 0),$$

где вектор $\vec{r}_0$ имеет проекции $(0, 0, a)$.

С помощью формулы (см. П. II, 2) вычисляем градиенты φ_2 и φ_1 в цилиндрических координатах ϱ, α, z:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho} = -kq\varrho\left(\frac{1}{r_2^{3/2}} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_1^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho} = -\frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{\varrho}{r_2^{3/2}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = kq\left(\frac{a - z}{r_2^{3/2}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{a + z}{r_1^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{a - z}{r_2^{3/2}}.$$

На граничной поверхности ($z = 0$) выполняются равенства

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

обеспечивающие выполнение соответствующих граничных условий.

5. Найти емкость плоского конденсатора, у которого промежуток между пластинами заполнен разнородными диэлектриками ε_1 и ε_2. Толщина слоев соответственно d_1 и d_2.

Так как $D = \sigma$, а $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}$, $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = E_1 d_1 + E_2 d_2$, то $\sigma \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \right) C = \sigma S$, откуда $C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$.

6. Найти емкость плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов, заполненных однородным диэлектриком.

1) Так как поле бесконечной плоскости определяется формулой $E = \frac{2\pi k \sigma}{\varepsilon}$, то для однородного поля плоского конденсатора имеем

$$E = \frac{4\pi k \sigma}{\varepsilon} = \frac{4\pi k Q}{\varepsilon S},$$

отсюда разность потенциалов между обкладками равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi k Q d}{\varepsilon S},$$

а емкость найдется по формуле (18.10):

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

2) С помощью теоремы Гаусса находим напряженность поля между обкладками. Она определяется зарядом внутренней обкладки:

$$E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 r l},$$

где l — длина цилиндра. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr = -\frac{2kQ}{\varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

и

$$C = \frac{\varepsilon l}{2k \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

3) Тем же способом получим

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{k (R_2 - R_1)}.$$

Глава VII
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА

В веществе с проводимостью, не равной нулю, наблюдается явление, очень важное для практических применений электродинамики: это направленное упорядоченное движение электрических зарядов — электрический ток.

В главе изучаются постоянный ток в веществе и сопутствующее току магнитное поле. Прохождение тока через вещество сопровождается выделением джоулева тепла, о чем говорится ниже. Остальные действия тока, например химические, рассматриваться не будут.

§ 19. Уравнения Максвелла и законы постоянного тока

19.1. Структура электрического поля постоянного тока. Для феноменологической теории — а такова электродинамика вещества — природа частиц (электронов, ионов), создающих ток, малосущественна, так же как и природа носителей заряда вообще. Величины, характеризующие электрический ток как физическое явление,— это прежде всего плотность тока и сила тока или величина тока, текущего через некоторую поверхность. Напомним соответствующие формулы:

$$\vec{j} = \varrho\vec{v},\ I = \int\limits_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$

Основная закономерность, определяющая ток в веществе,— это эмпирическое уравнение (15.27) или дифференциальная форма закона Ома:

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}.$$

Электрическое поле, вызвавшее направленное движение зарядов, задается в каждой точке проводника напряженностью $\vec{E}$; ток определяется вектором $\vec{j}$, а электрические свойства проводника — удельной электрической проводимостью вещества γ. Проводимость проводников на несколько порядков превышает проводимость диэлектриков, так что в классической электродинамике для последних часто считается $\gamma = 0$. Постоянство γ в достаточно широких пределах изменения величин $\vec{j}$ и $\vec{E}$ имеет место только для металлов и электролитов.

Постоянным называют ток, для которого во всех точках проводника вектор $\vec{j}$ не зависит от времени. Не зависит от времени и величина постоянного тока I. В силу уравнения закона Ома постоянный ток имеет место только в стационарном электрическом поле. По-

стоянной величиной должна быть в этом случае и плотность электрических зарядов ϱ. Используя уравнение непрерывности

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j},$$

заключаем, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \tag{19.1}$$

Это условие замкнутости линий постоянного тока в проводнике. Соотношение (19.1) приводит к важным выводам. Интегрируя (19.1) по поверхности трубки тока, образованной линиями тока (рис. 19.1), имеем

$$\oint_S \vec{j}\overrightarrow{dS} = \int_{S_1} \vec{j}\overrightarrow{dS} + \int_{S_2} \vec{j}\overrightarrow{dS} = I_2 - I_1.$$

Поскольку левая часть равенства по теореме Гаусса сводится к объемному интегралу от дивергенции $\vec{j}$, то она равна нулю, откуда $I_1 = I_2$. Сила тока постоянна в любом сечении трубки тока, т. е. постоянна в любом сечении проводника, совпадающего с этой трубкой. (Заряды не выходят за пределы боковой поверхности проводящего тела.)

С помощью уравнения закона Ома и условия замкнутости линий тока (19.1) находим условие замкнутости линий напряженности электрического поля, вызывающего ток в проводнике:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \tag{19.2}$$

Равенство (19.2) позволяет с учетом четвертого уравнения Максвелла (15.22) сделать вывод об отсутствии объемных зарядов в проводнике с постоянным током:

$$\varrho = 0. \tag{19.2-а}$$

Используя далее граничное условие (16.17), имеем

$$E_{2t} = E_{1t},$$

откуда следует пропорция

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

связывающая токи в двух соседних слоях с их проводимостями.

Что касается нормальной составляющей плотности тока, то на основе формулы (16.20) находим

$$j_{2n} = j_{1n},$$

т. е. заряд, притекающий к поверхности, равен заряду, уходящему от нее. Из последнего соотношения получаем

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{19.3}$$

Таким образом, стационарное поле постоянного тока в проводнике напоминает электростатическое поле в диэлектрике, только вместо ε здесь фигурирует γ. (Поле в кусочно-однородной диэлектрической среде при $\varrho = 0$ описывается уравнением $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, причем $E_{2t} = E_{1t}$, $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$.)

Если же имеется граница проводник-диэлектрик, то такого подобия нет. Хотя по-прежнему $E_{2t} = E_{1t}$, но $j_{2n} = j_{1n} = 0$, так как заряды из проводника в диэлектрик не выходят. Поэтому в проводнике $E_{1n} = 0$, тогда как в диэлектрике $E_{2n} \neq 0$ и зависит от плотности зарядов на поверхности проводника. Заметим для дальнейшего: при прохождении постоянного тока по замкнутой цепи на поверхности проводников имеются заряды.

В практике весьма распространены проводники значительной длины и небольшого сечения. Мы будем называть их линейными, если плотность тока в сечении можно считать (приблизительно) постоянной. Для них справедливо соотношение (1.10)

$$\vec{j}dV = I\vec{dl},$$

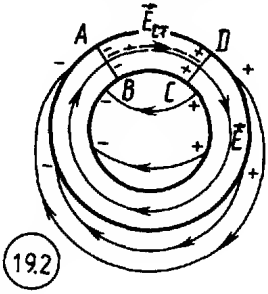
причем сила тока постоянна в любом сечении. В соответствии с этой формулой сила тока положительна, если ток течет по выбранному направлению обхода цепи, и отрицательна, если направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{dl}$ противоположны. Токи в линейных проводниках часто называют линейными. На основании вышесказанного ясно, что внутри замкнутого однородного линейного проводника линии тока и линии напряженности поля суть замкнутые непрерывные кривые, параллельные оси проводника.

19.2. Стороннее поле и закон Ома в дифференциальной форме. Рассмотрим систему уравнений Максвелла (15.22) применительно к постоянному току. В силу постоянства полей и отсутствия объемных зарядов уравнения для области внутри проводника приобретают вид

$$\text{I.}\ \begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E} = 0,\\ \operatorname{div}\vec{E} = 0,\end{cases}\qquad \text{II.}\ \begin{cases}\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j},\\ \operatorname{div}\vec{B} = 0.\end{cases} \tag{19.4}$$

Но из уравнений (19.4-I) для электрического поля видно, что данное поле не является ни вихревым, ни полем источников. Иными словами, постоянный ток в проводнике за счет электростатического потенциального поля невозможен, а вихревого электрического поля

19.1



19.2

в стационарном случае нет. Поэтому следуст признать, что *система (19.4) не включает в себя причину существования тока, а описывает только факт его прохождения через проводник.* Причина существования постоянного тока не учитывается уравнениями (19.4), следовательно, имест неэлектростатический характер. Но она существует и должна быть специально рассмотрена.

В первой части курса электродинамики (§ 2, п. 2.6) мы отмечали, что уравнения Максвелла описывают связь между полем и зарядами, движущимися не только под действием сил поля, но и других, не учтенных в классической электродинамике сил. Так, например, в любой электростатической задаче конфигурация зарядов не определяется уравнениями, а обусловлена некоторыми неэлектростатическими взаимодействиями. Аналогично обстоит дело и в случае тока: заряды, например, могут двигаться по инерции — и получится ток, могут переноситься движущимися телами, что также приведет к току, выбрасываться при распаде радиоактивного вещества и т. д. Исходной причиной движения зарядов в неподвижном проводнике может быть электрическое поле. Но в случае постоянного тока это неэлектростатическое поле объемных зарядов. В движении зарядов участвуют *сторонние* по отношению к системе (19.4) поля, которые формально можно учесть, вводя напряженность некоторого стороннего *электрического поля* $\vec{E}_{ст}$. Теперь на основании формулы (15.27) имеем

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{ст}). \qquad (19.5)$$

Равенство (19.5) является основным законом тока; это закон Ома в дифференциальной форме, в котором учтены поля, не входящие в систему уравнений (19.4). Здесь $\vec{E}$ — напряженность стационарного поля, созданного некоторыми поверхностными зарядами на границах раздела в проводнике (не учтены в уравнениях (19.4)!), а $\vec{E}_{ст}$ вообще не связано с распределением зарядов по проводнику.

Природа сторонних сил практически всегда электромагнитная, так как электрические заряды связаны электромагнитным взаимодействием. В частном случае стороннее поле может быть вихревым электрическим полем, возбуждаемым в генераторе тока. Сторонней силой может быть и магнитная составляющая силы Лоренца В химических источниках поле создается при разделении электрических зарядов в химических реакциях, оно есть результат квантовых эффектов и т. д. Но во всех случаях поле $\vec{E}_{ст}$ не учтено в системе (19.4), т. е. вектор $\vec{E}_{ст}$ не является напряженностью электростатического поля, созданного объемными зарядами в проводнике.

19.3. Поле замкнутой цепи с постоянным током. На практике широкое распространение имеют линейные токи, протекающие в замкнутых цепях, причем стороннее поле возбуждается на сравнительно малом участке цепи, называемом *источником тока.* Во внешней части цепи, т. е. вне источника, стороннего поля нет и действует стационарное электрическое поле, соответствующее движению зарядов (току); оно создается некоторым поверхностным распределением их. Но первопричина образования такого распределения зарядов — действие стороннего поля источника тока.

Составим себе наглядное представление о «механизме» возникновения тока в цепи с помощью качественного анализа электрического поля в проводнике и вокруг проводника с током. На рисунке 19.2 представлена широко применяемая в учебных целях модель источника: источник создает на поверхностях AB и CD стационарные заряды – это полюсы источника. На них начинается и оканчивается большая часть линий напряженности электрического поля, сконцентрированного в проводнике. Очевидно, что для «подавления» нормальной составляющей напряженности поля внутри проводника ($E_n = 0$) необходимо, чтобы заряды находились не только на поверхностях AB и CD, но и на внешней поверхности проводника. Так что поле вне проводника имеет нормальную составляющую. По мере удаления от источника тока вдоль проводника эта составляющая ослабевает, вместе с тем уменьшается и поверхностная плотность зарядов: линии напряженности поля вдали от источника (и вблизи от проводника) параллельны поверхности проводника.

Итак, электрическое поле в проводнике формируется легкоподвижными свободными зарядами проводника, образующими стационарные поверхностные заряды. (А поддерживает это стационарное распределение источник.)

Проводники, как правило, обладают высокими проводимостями. Это значит, что при малых напряженностях поля создаются значительные токи в проводнике. Они-то в основном и определяют совокупность явлений, сопровождающих ток, в частности тепловое действие, магнитное поле и т. д. Что касается стационарного электрического поля вне проводника, то оно оказывается относительно слабым. Именно это обстоятельство позволяет сосредоточить внимание на токе в проводнике, не рассматривая электрическое поле вне проводника.

Замкнутость линий тока означает однонаправленность вектора $\vec{j}$ во всей цепи. А это приводит согласно принятой модели источника тока к движению зарядов внутри источника навстречу постоянному электрическому полю в источнике, созданному зарядами на полюсах. Уточнить конфигурацию результирующего поля внутри источника в общем случае в рамках рассматриваемой модели невозможно. Остается считать, что внутри источника формально введенное стороннее поле направлено по току, компенсирует электрическое поле и, кроме того, создает ток внутри источника, восполняя потери энергии при движении зарядов

19.4. Интегральный закон Ома для замкнутой цепи. Закон Джоуля – Ленца. Предположим, что электрическая цепь образована линейным проводником и источником тока Используя равенство (19.5) и интегрируя обе его части по всему контуру цепи, получаем

$$\oint_L \vec{j}\,\overrightarrow{dl} = \oint_l \gamma \vec{E}\,\overrightarrow{dl} + \oint_L \gamma \vec{E}_{\text{ст}}\,\overrightarrow{dl} \qquad (19\,6)$$

Величину $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{ст} \overrightarrow{dl}$ (19 7)

называют электродвижущей силой источника тока (ЭДС). Математически это циркуляция вектора напряженности стороннего поля по контуру замкнутой цепи. Если стороннее поле сосредоточено на участке цепи (вообще говоря, оно может быть распределенным и по всей цепи), то

$$\mathcal{E}_{1,2} = \int_L \vec{E}_{ст} \overrightarrow{dl}. \tag{19.8}$$

В физическом смысле ЭДС есть удельная работа, совершаемая сторонними силами над зарядами в источнике.

Знак ЭДС, как это видно из формулы (19.6) и (19.7), зависит от выбора положительного направления обхода контура цепи. Целесообразно выбирать направление обхода по направлению плотности тока. Тогда ЭДС для всей замкнутой цепи всегда положительна. Что же касается участка цепи, то $\mathcal{E} > 0$, если стороннее поле направлено по току, и $\mathcal{E} < 0$, если оно направлено навстречу току. То же самое заключается и в правиле: ЭДС, содержащаяся на участке, считается положительной, если ток (обход) соответствует последовательности полюсов источника (–, +), и отрицательной – при последовательности (+, –).

Вернемся к интегральному равенству (19.6), которое в силу потенциального характера поля $\vec{E}$ приобретает вид:

$$\oint_L \frac{1}{\gamma} \vec{j} \overrightarrow{dl} = \mathcal{E}.$$

Учитывая сонаправленность $\vec{j}$ и $\overrightarrow{dl}$, а также добавляя в числитель и знаменатель подынтегральной функции в левой части множитель S – площадь поперечного сечения проводника, получим

$$\oint_L jS \frac{dl}{\gamma S} = \mathcal{E}. \tag{19.9}$$

Вводя обозначение

$$dR = \frac{dl}{\gamma S} - \tag{19.10}$$

сопротивление элемента длины проводника, вместо (19.9) имеем

$$I \oint_L dR = \mathcal{E},$$

или

$$IR_{п} = \mathcal{E}. \tag{19.11}$$

Формула (19.11) является интегральным выражением закона Ома для полной цепи Сопротивление $R_{п}$ может быть записано как сумма

сопротивлений внешней (R) и внутренней (r) частей цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \tag{19.12}$$

Рассмотрим еще процессы в замкнутой цепи с энергетической стороны. Источник тока совершает работу над электрическими зарядами против сил электрического поля, тем самым увеличивая потенциальную энергию зарядов. Это происходит внутри источника тока (или на участке с ЭДС). Во внешней части цепи заряды движутся под действием стационарного электрического поля, однако их кинетическая энергия не увеличивается, так как имеет место передача энергии проводнику. В § 16, п. 16.3 уже говорилось о переходе энергии зарядов во внутреннюю энергию проводника. С количественной стороны процесс превращения энергии описывается равенствами (16.24) и (16.24-а)

$$\vec{j}\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}, \quad \tilde{Q} = \frac{j^2}{\gamma}.$$

В соответствии с этими равенствами работа поля над зарядами в нем $(\vec{j}\vec{E})$ равна работе тока $\left(\frac{j^2}{\gamma}\right)$ в проводнике (без ЭДС), а последняя равна выделенной в неподвижном проводнике теплоте $(\tilde{Q})$.

Эти равенства справедливы и для всей цепи, если учесть стороннее поле и воспользоваться законом Ома для нее (19.5). В таком случае получаем

$$\frac{j^2}{\gamma} = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \tag{19.13}$$

Соотношение (19.13) выражает закон сохранения энергии для тока при наличии стороннего поля в дифференциальной форме. Приемом, совершенно аналогичным использованному для вывода формулы (19.11), приводим его к интегральной форме:

$$I^2 R_{\text{п}} = I\mathcal{E},$$

или

$$Q = I^2 R_{\text{п}} = I\mathcal{E}. \tag{19.14}$$

Тот же результат можно достигнуть, умножая формулу $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{п}}}$ почленно на I и истолковывая соответственно левую и правую части полученного равенства.

Мы получили закон Джоуля – Ленца для замкнутой цепи. (Здесь Q – теплота, а не величина заряда.)

Таким образом, вся работа, совершенная током в замкнутой цепи, равна работе стороннего поля, или, как говорят, работе сторонних сил источника тока, производимой над зарядами.

Работу тока в цепи можно представить в виде двух слагаемых:

работы тока на внешнем участке цепи, равной работе стационарного электрического поля, и работы тока внутри самого источника тока. Вводя для внешней части цепи разность потенциалов или напряжение

$$U = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{19.15}$$

имеем для работы тока на внешнем участке выражение

$$I^2R = UI,$$

а также для всей цепи –

$$I^2R + I^2r = \mathcal{E}I.$$

Работа сторонних сил $\mathcal{E}I$ больше работы по разделению зарядов между полюсами источника, соответственно больше работы, совершаемой зарядами во внешней цепи, на величину работы тока в источнике (I^2r).

В элсктротехнике, кроме понятия «разность потенциалов» или «напряжение», вводится неэквивалентное ему понятие «падение напряжения». Для любого участка цепи, содержащего ЭДС, выполняется соотношение

$$\int_1^2 \vec{j}\,\vec{dl} = \gamma \int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl} + \gamma \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}\,\vec{dl},$$

или

$$IR_{1,2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{1,2}. \tag{19.16}$$

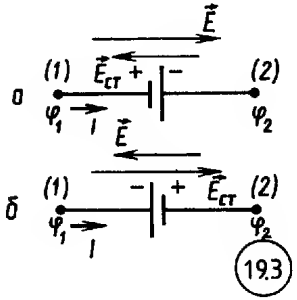
Эта формула выражает закон Ома для участка цепи. Величина $U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$ – *напряжение*, а произведение $IR_{1,2}$ называется *падением напряжения* на участке 1–2, причем

$$U_{1,2} = IR_{1,2} - \mathcal{E}_{1,2}.$$

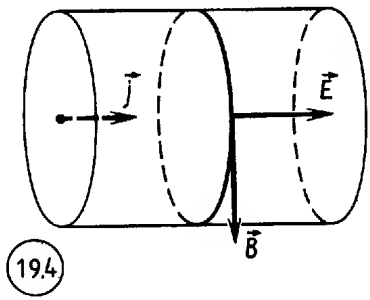
Выбираем направление обхода участка цепи по току. Тогда $IR_{1,2}$ всегда положительная величина, $U_{1,2}$ может быть больше или меньше нуля в зависимости от потенциалов точек φ_1 и φ_2 (но используют обычно модуль этой величины U). Что касается ЭДС, то $\mathcal{E} > 0$, если источник проходится током в направлении от отрицательного полюса к положительному, и $\mathcal{E} < 0$ – от положительного к отрицательному (рис. 19.3, *а, б*).

Пусть ток на участке 1–2 течет в соответствии с рисунком *(а)*, т. е. $\mathcal{E} > 0$, $U_{1,2} > 0$ и

$$U = \mathcal{E}_{1\,2} + IR_{1,2}$$



19.3



19.4

В этом случае ток идет как бы навстречу ЭДС, т. е. напряжение больше падения напряжения, электрическое поле производит джоулево тепло и преодолевает встречное стороннее поле.

Если же ток течет в соответствии с рисунком *(б)*, то $\mathcal{E} < 0$, $U_{1,2} < 0$ и

$$U = \mathcal{E} - IR_{1,2},$$

т. е. напряжение меньше ЭДС на величину падения напряжения

Итак, *напряжение и падение напряжения — разные величины, они совпадают лишь для участка цепи при отсутствии на нем ЭДС.*

Пример 19.1. **Расчет разветвленных цепей. Правила Кирхгофа.**

Окружая n-кратное разветвление проводников в точке O замкнутой поверхностью S, на основании уравнения непрерывности и формулы (19.1) имеем

$$\oint \vec{j}\,\overrightarrow{dS} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, выбирая положительное направление на всех проводниках к точке O, получим, что алгебраическая сумма токов, притекающих к разветвлению, равна нулю.

Для любого участка произвольной линейной цепи с разветвлениями, например 1–2, имеем

$$IR_{1\,2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{1,2}$$

Суммируя предыдущее равенство почленно по всем участкам любого замкнутого контура i, получим

$$\sum_k I_{ik}R_{ik} = \sum_k \mathcal{E}_{ik}. \qquad (2)$$

(Здесь значение I_{ik} положительно, если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода, а $\mathcal{E}_{ik}$ положительно, если источник при обходе контура приходится током от «минуса» к «плюсу».)

Формулы (1) и (2) носят название правил (законов) Кирхгофа, они применяются для расчета разветвленных цепей.

Пример 19.2 **Поток энергии в цепи постоянного тока.**

Ранее было показано, что расход энергии на джоулево тепло во внешней части цепи постоянного тока компенсируется работой стороннего поля внутри источника тока, где какой-либо вид энергии превращается в энергию электрического поля Определим, как совершается перенос энергии от источника тока к различным участкам внешней цепи.

Пусть линейная цепь находится в пустоте, тогда $\varepsilon = \mu = 1$. Выделим небольшой участок проводника вдали от источника тока. На его поверхности напряженность электрического поля $\vec{E}$ касательна к поверхности проводника и направлена вдоль проводника по току. Ток в проводнике создает магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, причем вблизи поверхности силовые линии являются концентрическими окружностями (рис 19.4). Найдем поток энергии электромагнитного поля через поверхность выделенного участка проводника. С помощью формулы (3.7) имеем

$$\oint \vec{\sigma}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\mu_0}\int [\vec{E}\,\vec{B}]\,\overrightarrow{dS}.$$

Так как $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma}$, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (см. формулу (2.16)), а векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны, то

$$\oint \vec{\sigma}\,\overrightarrow{dS} = \int\limits_{S_{\text{бок}}} \frac{jI}{2\pi r\gamma}\,dS = \frac{jI}{2\pi r\gamma}\,2\pi rl = jSI\,\frac{l}{\gamma S} = I^2R.$$

Вектор $\vec{\sigma}$ направлен внутрь проводника перпендикулярно к его боковой поверхности. Величина I^2R есть энергия, выделяемая током в проводнике за единицу времени. Следовательно, вся эта энергия поступает в участок проводника через его боковую поверх-

ность в виде энергии электромагнитного поля. Далее она сообщается свободным зарядам, и при взаимодействии зарядов с кристаллической решеткой происходит ее превращение во внутреннюю энергию.

Согласно рассмотренной в § 19, п. 19.3 модели электрического поля замкнутой линейной цепи вектор напряженности $\vec{E}$ внутри источника тока направлен навстречу току, а это значит, что вектор потока энергии направлен здесь наружу, от проводника. Энергия в виде энергии электромагнитного поля «вытекает» из источника тока, движется в пространстве вдоль проводника ко всем его участкам и «втекает» в них, где и потребляется, превращаясь в другие виды энергии. Конечный вывод состоит в том, что переносчиком энергии в цепи служит электромагнитное поле. Провода играют роль «направляющих», обеспечивая концентрацию потока энергии. Этот вывод оказывается справедливым и для переменного тока (если частота не слишком велика и нет излучения электромагнитных волн).

Пример 19 3. **Расчет сопротивления проводящей среды.**

Имеются два проводящих электрода, соединенные с полюсами источника тока и погруженные в проводящую среду (рис. 19.5). Стационарное электрическое поле в среде создается поверхностными зарядами, находящимися на электродах. Расход зарядов, связанный с прохождением тока, пополняется источником. Определим ток, текущий с одного из электродов:

$$I = \oint \vec{j}\, \overrightarrow{dS} = \oint j_n dS.$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Так как

$$j_n = \gamma E_n,$$

то

$$I = \gamma \oint E_n dS.$$

Заряд проводящего тела равен $Q = \oint \sigma dS$, если воспользоваться формулой (18.1), то

$$Q = \varepsilon \varepsilon_0 \oint E_n dS.$$

Для проводника $Q = C\varphi$ и

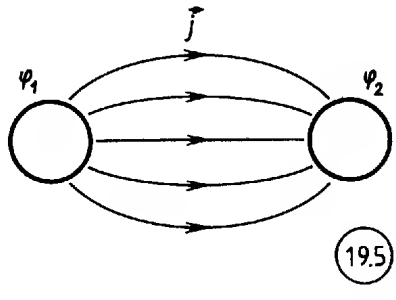
$$\oint E_n dS = \frac{C\varphi}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

С учетом этого соотношения формула для силы тока, текущего с первого элсктрода, приобретает вид

$$I_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0} C_1 \varphi_1. \qquad (19\ 17)$$

Аналогично можно рассчитать ток, текущий на другой электрод.

$$I_2 = \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0} C_2 \varphi_2. \qquad (19.18)$$



19.5

Вычислим сопротивление среды между этими двумя электродами по формуле

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}, \tag{19.19}$$

и учтем, что $I_1 = -I_2 = I$. Получим

$$R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\gamma} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Эта формула применяется, например, для расчета сопротивления участков цепи с жидкими проводниками по заданным параметрам среды и электродов.

§20. Магнитное поле постоянных линейных токов

20.1. Закон Био-Савара. Основным источником магнитных полей, используемых человеком в технических и научных целях, являются линейные электрические токи. Поэтому целесообразно специально рассмотреть магнитное поле линейного тока.

Влиянием вещества проводника, по которому течет ток, на создаваемое поле можно пренебречь, так как проводник линейный, т. е. достаточно малого сечения. Влияние же вещества, в котором получаем магнитное поле, удобно учесть, используя в промежуточных расчетах величину $\vec{H}$, а затем переходить к $\vec{B}$.

Основными формулами для этого случая служит уравнение из системы (19.4)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \tag{20.1}$$

и материальное уравнение

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \tag{20.2}$$

Уравнение (20.1) приводится к интегральной форме совершенно аналогично рассмотренному в начале курса случаю поля в вакууме (см. § 2, п. 2.2):

$$\oint_L \vec{H}\, \overrightarrow{dl} = I, \tag{20.3}$$

т. е. циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому контуру равна силе тока, пронизывающего контур. Этой формулой удобно пользоваться в случаях симметричного распределения тока в пространстве. Однако более общим является иной подход.

Вводя векторный потенциал для магнитного поля соотношением

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{H}}, \tag{20.4}$$

по аналогии с выводами для магнитостатического поля в вакууме (§ 8), имеем вместо уравнения (20.1) уравнение

$$\Delta \vec{A}_{\text{H}} = -\vec{j}. \tag{20.5}$$

Решение уравнения (20.5) известно (см. формулу (8.3)):

$$\vec{A}_{\text{н}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0.$$

Для определения напряженности по формуле (20.4) можно воспользоваться готовым расчетом пункта 8.2:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{[\vec{j}(\vec{r}_0)\vec{r}']}{(r')^3} dV_0, \tag{20.6}$$

где обозначения соответствуют рисунку 8.1.

Осталось перейти к линейным токам. Согласно формуле (1.10) для элемента тока имеем

$$\vec{j} dV = I\vec{dl},$$

поэтому формула (20.6) приводится к виду

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \int_L \frac{[\vec{dl}\vec{r}']}{(r')^3} \tag{20.7}$$

с обозначениями рисунка 20.1.

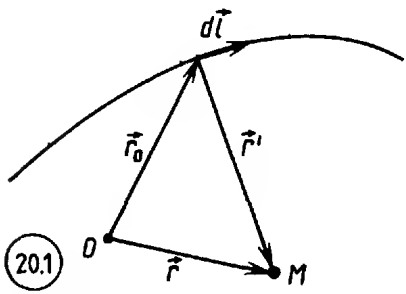
Формула (20.7) выражает закон Био-Савара для магнитного поля тока. Это его интегральная форма. В дифференциальной форме закон задает напряженность, созданную элементом проводника $\vec{dl}$:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \frac{[\vec{dl}\vec{r}']}{(r')^3}. \tag{20.8}$$

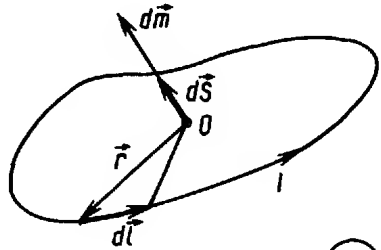
Соотношения (20.7) и (20.8) широко применяются на практике для расчета магнитных полей линейных токов заданной конфигурации. Вещество, в котором образуется магнитное поле, изменяет последнее. Конечный этап решения задачи — переход к индукции магнитного поля с учетом магнитных свойств вещества:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \tag{20.9}$$

Это необходимо потому, что именно индукция определяет силовое действие магнитного поля, его энергию.



20.1



20.2

Остановимся еще на магнитном моменте линейного тока. Часто магнитные свойства системы с замкнутыми линиями тока характеризуются магнитным дипольным моментом (8.11), который для линейного замкнутого тока имеет вид

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_L [\vec{r}\vec{dl}]. \qquad (20.10)$$

В формуле (20.10) интегрирование производится по всей длине замкнутого проводника (рис. 20.2). Нетрудно убедиться (см. пример 8.2), что для плоского контура с током магнитный момент выражается формулой

$$\vec{m} = I\vec{S}, \qquad (20.11)$$

где $\vec{S}$ – вектор площадки, обтекаемой током. (Нужно только учесть, что $[\vec{r}\vec{dl}] = 2\vec{dS}$ и для всех элементов площади векторы $d\vec{S}$ направлены одинаково.)

В дипольном приближении магнитное поле проводника с током определяется в соответствии с формулами (8.12) и (8.13)

$$\vec{A}_{\text{н}} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\vec{m}\vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\vec{m}\vec{n}]}{r^2},$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{r^3}. \qquad (20.12)$$

Магнитное поле на большом расстоянии от системы токов определяется с учетом заполняющего пространство магнетика по формуле (20.12)

Ранее говорилось, что магнитное поле имеет релятивистскую природу. В частности, электрическая энергия взаимодействия зарядов при малых скоростях движения во много раз больше магнитной энергии. И только при релятивистских скоростях магнитная составляющая сравнима с электрической. Это непосредственно видно и из сопоставления формул напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ поля (6.13) и (8.6): при малых скоростях движения зарядов численное значение электрической напряженности из-за большого множителя k оказывается значительно больше численного значения магнитной индукции, в выражение которой входит малый множитель f. Поскольку силовое действие полей определяется составляющими силы Лоренца (1 8), пропорциональными $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то при малых скоростях движения зарядов магнитная составляющая пренебрежимо мала по сравнению с электрической

Поэтому в предыдущих параграфах можно было считать, что только электрическое поле формирует ток, определяя вместе со связями, накладываемыми веществом, движение зарядов в проводнике. Иными словами, мы исходили из предположения о медленном движении зарядов в проводнике Предположение подтверждается экспериментально: заряды, составляющие ток в проводнике, движутся со скоростями порядка миллиметров и сантиметров в секунду.

Но это вовсе не означает, что магнитное поле тока мало по сравнению с электрическим во всех случаях Макроскопическое магнитное поле системы движущихся зарядов велико при больших количествах движущихся зарядов одного знака. Металлический проводник, например электронейтральная система положительных ионов и отрицательных электронов, не создает существенного макроскопического электрического поля, но создает значительное магнитное поле вследствие движения электронов. Таким образом, здесь магнитное поле отнюдь не мало и играет основную роль во внешних проявлениях тока – действиях проводника с током на другие токи.

Магнитное поле и магнитное взаимодействие токов чрезвычайно широко при-

меняются в технике. Достаточно сказать, что на них основано действие всех электродвигателей, электромагнитов, генераторов тока, множества разнообразных приборов.

Пример 20.1. Расчет магнитного поля кругового тока.

В соответствии с формулой (20.8) вектор напряженности $\vec{H}$ в центре направлен перпендикулярно плоскости кольца и составляет с током правый винт (рис. 20.3). Для модуля напряженности получаем

$$H = \frac{I}{2r}. \tag{20.13}$$

Широко применяемые в электротехнике различные магнитные катушки – соленоиды – представляют собой совокупность витков с током. Магнитное поле в них складывается из магнитных полей отдельных витков

Пример 20.2. Расчет магнитного поля проводника конечной длины.

Элемент проводника длиной $\vec{dl}$ создает поле (рис. 20.4)

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{[\vec{dl}\vec{r}']}{r'^3}.$$

С учетом направлений векторов имеем

$$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{dl}{r'^2}\sin(\vec{dl}\vec{r}').$$

Направим ось Oz вдоль по току, тогда

$$dH = \frac{IR}{4\pi}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{z},$$

то

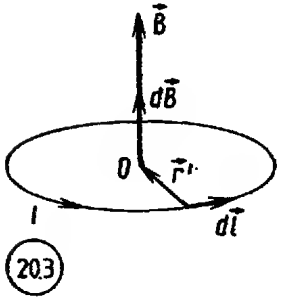
$$dH = \frac{I}{4\pi R}\sin\alpha d\alpha.$$

Интегрируя по длине проводника l, получаем результат:

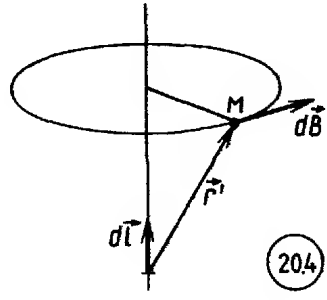
$$H = \frac{I}{4\pi R}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

(индукция направлена по касательной к окружности, проходящей через точку M).

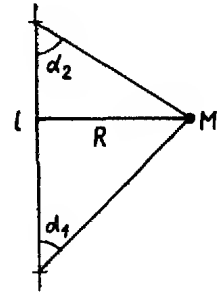
Для бесконечного проводника ($l \to \infty$, $\alpha_2 \to 0$, $\alpha_1 \to \pi$)



20.3



20.4



$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

Аналогичная формула (2 16) выведена выше другим способом

20.2. Понятие о магнитостатике магнетиков. Явление намагничивания вещества и величины, характеризующие намагничивание и магнитные свойства вещества, рассмотрены ранее, в § 15. Магнитное поле некоторой системы токов в веществе изменяется благодаря магнитным свойствам последнего. По сравнению с вакуумом оно возрастает в μ раз в парамагнетиках и ферромагнетиках и ослабевает в диамагнетиках (там $\mu < 1$). (В настоящее время различают также ферриты, антиферромагнетики и новейший класс магнитных веществ, не укладывающийся в рамки феноменологической электродинамики и имеющий многие до сих пор не объясненные физикой свойства. Это спиновые стекла.)

Для кусочно-непрерывной магнитной среды может возникнуть задача, аналогичная основной задаче электростатики: потребуется найти магнитное поле при наличии границ раздела между областями с различными μ. При ее решении следует найти напряженность магнитного поля $\vec{H}$, созданного токами во всем пространстве, а затем учесть магнитные свойства вещества и граничные условия – поведение нормальных и тангенциальных составляющих векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ на границах раздела сред.

Рассмотрим с качественной стороны наиболее типичную задачу о магнитном поле токов при наличии ферромагнитных тел с большим μ.

Речь идет, например, о соленоиде с сердечником из ферромагнитного материала Напряженность магнитного поля внутри бесконечного соленоида выражается формулой

$$H = nI,$$

где n – число витков на единицу длины, а I – сила тока

Если соленоид снабжен сердечником, то индукция поля внутри его увеличивается в μ раз по сравнению с вакуумом:

$$B = \mu\mu_0 nI$$

Пусть теперь имеем дело с замкнутым сердечником конечных размеров, магнитное поле в котором возбуждается витками линейного проводника с током (рис. 20.5). Определяя напряженность поля $\vec{H}$ внутри сердечника по заданному току, анализируем характер поля с помощью граничных условий (см. табл. 1).

В области витков с током, где $\vec{H}$ имеет максимальное значение, вектор $\vec{H}$ почти параллелен поверхности сердечника; поэтому

$H_{1n} \approx 0$ и имеется в основном одна тангенциальная составляющая магнитного поля. Используя условие

$$\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

получаем

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} \approx \frac{B_{1t}}{\mu_1}.$$

Магнитное поле вне сердечника резко ослабевает ($\mu_2 \ll \mu_1$), т. е. оно практически полностью концентрируется в сердечнике.

Если в сердечнике имеется поперечный разрез-зазор, то для индукции магнитного поля, вектор которой нормален к образованной зазором границе раздела, используем граничное условие

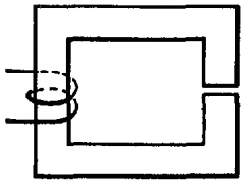
$$B_{2n} = B_{1n}.$$

Это значит, что поле внутри зазора, который имеет небольшую протяженность по сравнению с шириной сердечника, практически не ослабевает.

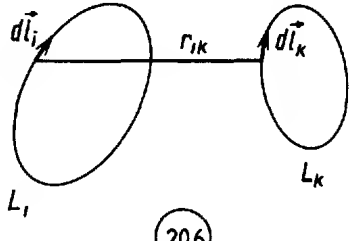
Приведенные рассуждения позволяют понять роль всевозможных сердечников и магнитопроводов. Они предназначены для концентрации магнитного поля, созданного током, в определенных местах пространства, для передачи его без рассеивания магнитных линий от места образования током к месту использования при одновременном многократном усилении поля. (В электротехнике используется понятие магнитной цепи, в которой существует магнитное поле Это совокупность тел, концентрирующих магнитное поле внутри себя.)

20.3. Энергия магнитного поля постоянных токов. Коэффициенты индукции. Рассмотрим систему замкнутых проводников с током, помещенных в однородную магнитную среду (рис 20.6) В § 8, п. 8.5 показано, что энергия магнитного поля может быть представлена как энергия взаимодействия токов между собой. С помощью формулы (8.17) имеем

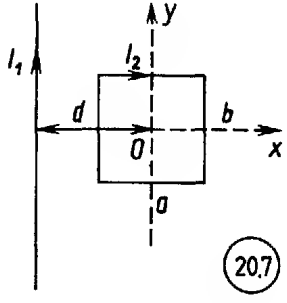
$$W = \sum_i \frac{1}{2} I_i \oint_{L_i} \vec{A}_i \vec{dl}_i. \qquad (20.14)$$



20.5



20.6



20.7

Подставляя сюда значение потенциала $\vec{A}$, найденное по формуле (8.3) с учетом магнитной среды, приходим к выражению

$$W = \frac{\mu f}{2} \sum_{ik} I_i I_k \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{\vec{dl}_i \vec{dl}_k}{r_{ik}}. \qquad (20.15)$$

Преобразуем равенство (20.14), используя теорему Стокса:

$$\oint_{L_i} \vec{A}_i \vec{dl}_i = \int_{S_i} \mathrm{rot}\ \vec{A}_i \vec{dS}_i = \int_{S_i} \vec{B}_i \vec{dS}_i = \Phi_i,$$

где Φ_i – поток вектора индукции магнитного поля через контур проводника с током. Следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i. \qquad (20.16)$$

Можно усмотреть аналогию в выражениях (20.16) и (18.14) – формулах энергии системы токов и энергии системы заряженных проводников. Аналогия может быть продолжена, если в формуле (20.15) ввести коэффициенты, определяемые взаимным расположением в пространстве, формой и размерами проводников, а также магнитными свойствами среды:

$$L_{ik} = \mu f \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{\vec{dl}_i \vec{dl}_k}{r_{ik}}. \qquad (20.17)$$

Они называются: если $i = k$, то L_{ii} – коэффициент самоиндукции (индуктивность); если $i \neq k$, то L_{ik} – коэффициент взаимной индукции. Теперь

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k. \qquad (20.18)$$

Формула (20.18) аналогична формуле (18.15), причем ток нужно сопоставить потенциалу, а коэффициенты L_{ik} – коэффициентам C_{ik}. В частности, для одного проводника с током

$$W = \frac{1}{2} L I^2. \qquad (20.19)$$

Сравним также выражения для энергии магнитного поля (20.16) и (20.18). Если в формуле (20.18) отделить суммирование по i от суммирования по k, то

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \sum_k L_{ik} I_k.$$

При сравнении можно видеть, что

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k. \qquad (20.20)$$

Теперь открывается возможность определения коэффициента L_{ik}

через поток магнитной индукции. Например, для одиночного проводника

$$\Phi = LI.$$

(Понятно, что прямой расчет по формуле (20.17) возможен только в случае простейших конфигураций токов.)

Итак, энергия системы линейных токов, являющаяся по своей природе энергией магнитного поля, выражается в стационарном (и квазистационарном) случае величинами, которые можно трактовать как энергию взаимодействия токов между собой. В такой форме энергия выражается через силу тока и коэффициенты само- и взаимной индукции.

Пример 20.3. **Расчет коэффициентов L_{ik}.**

Найдем коэффициент взаимной индукции между прямым бесконечным проводом и прямоугольной проводящей рамкой (рис. 20.7). Поток магнитной индукции, пронизывающий рамку, определяется по формуле (20.20)

$$\Phi_2 = L_{2,1}I_1 + L_{2,2}I_2, \tag{1}$$

где слагаемое $L_{2,1}I_1$ выражает часть потока, созданную полем прямого тока. Но ее можно подсчитать непосредственно через индукцию поля:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

В данном случае вектор $\vec{B}$ везде перпендикулярен плоскости рамки, поэтому

$$\Phi = \int_S BdS.$$

Выбирая оси координат, как показано на рисунке, на основании формулы для индукции поля прямого тока (2.16) имеем

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{dxdy}{d+x},$$

откуда

$$\Phi = \frac{\mu_0 bI}{2\pi}\ln\frac{2d+a}{2d-a}. \tag{2}$$

Сопоставляя значения Φ (1) и (2), получаем

$$L_{2,1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{2d+a}{2d-a}.$$

20.4. Механические силы, действующие в магнитном поле. Формула Ампера. Найдем силу, действующую на проводник с током в магнитном поле. Располагая формулой (1.8) для магнитной составляющей силы Лоренца, можно записать

$$d\vec{F}_м = [\vec{j}\vec{B}]\,dV,$$

или для элемента линейного тока

$$d\vec{F}_м = I[\vec{dl}\,\vec{B}]. \tag{20.21}$$

Это выражение носит название закона Ампера. Для проводника конечной длины формула Ампера приобретает вид

$$\vec{F}_м = I\int_L [\vec{dl}\,\vec{B}]. \tag{20.22}$$

Ранее было найдено выражение (8.14) для энергии (жесткой) системы токов во внешнем поле в приближении дипольного магнитного момента.

$$U = -\vec{m}\vec{B}. \tag{20.23}$$

Эта формула применима к линейным токам, протекающим по жесткому контуру, причем магнитный момент тока следует вычислять по формуле (20.10), а для плоского контура – по формуле (20.11).

Кроме формул Ампера для вычисления силы и момента силы, действующих на контур, можно использовать соотношения (8.15) и (8.16).

Первое из них позволяет найти силу, действующую на магнетик. Элемент объема dV обладает дипольным моментом $d\vec{m}$. На него действует сила

$$d\vec{F} = (d\vec{m}\nabla)\,\vec{B}.$$

Используя формулы (15.12), (15.16) и (15.23), приводим это выражение к виду

$$d\vec{F} = \frac{\varkappa}{\mu\mu_0}(\vec{B}\nabla)\,\vec{B}dV.$$

Отсюда плотность силы равна:

$$\vec{f} = \frac{\varkappa}{2\mu\mu_0}\operatorname{grad} B^2. \tag{20.24}$$

(Последний шаг в преобразованиях сделан на основе формулы 29 из приложения II. Учтено, что в магнетике токов нет, поэтому $\operatorname{rot}\vec{B} = 0$.)

Выражение (20.24) аналогично формуле (18.17) для силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле. Из него следует, что парамагнитное тело втягивается в поле, т. е. движется под действием магнитных сил в сторону возрастания модуля индукции поля. Напротив, диамагнитное тело из поля выталкивается. Данный эффект используется при устройстве «магнитной подвески», т. е. когда образец вещества парит в воздухе, так как сила тяжести уравновешена магнитной силой. Этот опыт можно осуществить и с веществом в сверхпроводящем состоянии: сверхпроводники обладают свойствами идеального диамагнетика, у которого $\varkappa = -1$. (При $\varkappa = -1$ $\vec{J} = -\vec{H}$, где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля. Результирующее магнитное поле в сверхпроводнике равно нулю: $\vec{B} = (1 + \varkappa)\,\vec{B}_0 = 0$.)

Методические указания и рекомендации

I. Материал, изложенный в главе, носит прикладной характер – это применение общих законов и уравнений электродинамики в частных случаях, имеющих громадное практическое значение. Студенты изучают в курсе общей физики все входящие сюда вопросы, поэтому возможна организация самостоятельной проработки материала в ряде мест главы.

Мы обращаем внимание лекторов на использование векторов $\vec{H}$ и $\vec{D}$ в стационарных случаях; при этом резко упрощается написание многих громоздких из-за коэффициентов в системе СИ формул.

Поляризация и намагничивание вещества в нашем курсе изложены в главе V. По этой причине сократилось изложение электростатики, а магнитостатика вещества затронута только в самом необходимом в связи с магнитным полем тока

II. При работе над текстом главы полезно выполнить упражнения и рассмотреть примеры.

§ 19. Обсудите с качественной стороны превращения энергии в электрической цепи. Пользуясь примером 19.2, разберитесь в природе так называемой энергии электрического тока, в механизме передачи ее по проводам. Приведите примеры известных вам сторонних сил. Какую роль сторонние силы играют в превращениях энергии в цепи, в образовании электрического поля, в распределении зарядов (модель цепи — на рисунке 19.2)? Приведите примеры нелинейных токов. Решите задачи 1—3 из упражнений

§ 20. Обсудите качественные различия основных классов магнетиков Почему явления в ферромагнетиках в ряде случаев не описываются теорией Максвелла? В каких случаях уравнения классической электродинамики применимы к ферромагнитной среде? Почему для изучения поля в веществе используют вектор $\vec{H}$ дополнительно к $\vec{B}$? Примените теоретические сведения о магнитном поле для анализа соответствующей темы школьного курса. Разберитесь в ролях электрического и магнитного полей тока вне проводника Изобразите графически поведение линий индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела двух магнетиков Решите задачи 4—8 из упражнений.

Упражнения

1. Исследовать, как ведут себя линии тока на границе раздела двух проводящих сред.

Согласно граничным условиям (16.19) и (16.20) линии тока преломляются:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

2. Изучить поведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на поверхности проводника с током

Для стационарного тока на внутренней стороне поверхности проводника $j_n=0$, значит, $E_{1n}=0$, откуда $D_{1n}=0$ внутри проводника, а вне проводника из граничного условия (16.9) следует, что

$$D_{2n}=\sigma.$$

Однако $E_{1t}=\gamma j$; так как $E_{2t}=E_{1t}$, то проекции E_{2t} и D_{2t} не равны нулю

на поверхности проводника. Векторы $\vec{E}_2$ и $\vec{D}_2$ не перпендикулярны поверхности проводника.

3. Пространство между обкладками шарового конденсатора заполнено веществом с электрической проводимостью γ. Найти силу тока, протекающего через конденсатор при постоянной разности потенциалов, и сопротивление шарового слоя.

Используя формулу (19.17) и формулу сопротивления (19.16), получим

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\gamma}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) = \frac{k\varepsilon_0}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где r_1 и r_2 – радиусы обкладок.

Ток с внутренней сферы

$$I = \frac{\gamma}{\varepsilon\varepsilon_0} C_1\varphi_1.$$

Ток на наружную сферу

$$I = \frac{\gamma}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2\varphi_2.$$

4. Найти с помощью формулы Био-Савара индукцию поля на оси кольцевого тока силой I при радиусе кольца R.

Ответ: $B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$,

где d – расстояние от точки наблюдения до центра кольца.

5. Определить величину и направление силы взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с током.

Ответ: Притяжение при однонаправленных и отталкивание при разнонаправленных токах, $F = \frac{2fI_1I_2}{R} l$. (R – расстояние между проводами.)

6. Пользуясь формулой для момента силы, действующей на рамку с током в магнитном поле, обсудить возможности определения индукции магнитного поля по этому моменту.

Известно, что $\vec{M} = [\vec{m}\vec{B}]$,

а $m = IS$. Предположим, что в пределах рамки поле однородно. Для рамки, плоскость которой совпадает с линиями индукции магнитного поля,

$$B = \frac{M}{IS}.$$

7. Найти магнитное поле в коаксиальном кабеле, по центральной жиле которого течет ток I, а по оболочке $-I$. Радиус центрального проводника a, наружный радиус b; толщиной оболочки пренебречь.

С помощью формулы для циркуляции вектора индукции магнитного поля получим

$$B = \frac{2fI_r}{r},$$

где r — расстояние от центра кабеля, а I_r — ток, протекающий через круг радиусом r. Во внутренней жиле

$$B = \frac{2fI_r}{a^2},$$

в диэлектрике

$$B = \frac{2fI}{r}.$$

Вне кабеля $B = 0$. (μ везде принято равным 1.)

8. Вычислить индуктивность кабеля длиной l (см. задачу 7).

Используем формулу

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Энергию поля найдем по формуле

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV.$$

Результат расчета:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4}\right).$$

Глава VIII
КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Переменный ток и всевозможные его применения в промышленности, технике, быту связаны с особым частным случаем электромагнитного поля, называемого квазистационарным. Соответственно квазистационарным называется ряд процессов в веществе, электротехнических машинах и устройствах, таких, как генераторы переменного тока, трансформаторы, электродвигатели, линии для передачи электрической энергии. В данной главе рассматриваются принципиальные вопросы теории квазистационарного поля и квазистационарных процессов.

§ 21. Уравнения квазистационарного поля. Электромагнитная индукция

21.1. Условия квазистационарности. Основная система уравнений (15.22) рассматривается сейчас при наличии переменных полей: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$. Однако общее решение уравнений Максвелла

в запаздывающих потенциалах применять в ряде случаев нет смысла, потому что запаздывание в системе пренебрежимо мало, т. е.

$$\tau \ll T, \tag{21.1}$$

где $\tau = \frac{l}{c}$ — время запаздывания, а T — характерное время изменения полей. Это и есть условие квазистационарности.

В электротехнике используется переменный ток с частотой 50 Гц Электромагнитная волна с такой частотой имеет длину $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м. Ясно, что если размеры установок (моторы, генераторы, трансформаторы, осветительные системы и т. д.) меньше или порядка километра, то запаздывание внутри системы можно не учитывать. В технике применяются токи, синхронно (т. е. в фазе или с постоянной разностью фаз) изменяющиеся во всех участках системы. Электромагнитные поля в таких системах часто концентрируются в небольших объемах пространства (в зазоре между полюсами, в пределах сердечника и т. д); излучение электромагнитных волн ничтожно. Если расстояния, на которых поля заметно отличны от нуля, значительно меньше λ, то и здесь можно пренебречь запаздыванием. Условие малости расстояний

$$|\vec{r}| \ll cT$$

есть другая форма критерия квазистационарности.

В квазистационарных процессах, как и в случае излучения в дипольном приближении (см. § 10), скорости движения зарядов нерелятивистские ($v \ll c$). Но, кроме того, в квазистационарном случае поля изменяются сравнительно медленно. Это значит, что изменения магнитного и электрического полей вносят неравнозначные вклады в процессы, происходящие в системе

В третьем уравнении из системы (15.22), если записать его с учетом формулы (15.27) в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \gamma \vec{E},$$

первым слагаемым справа можно пренебречь по сравнению со вторым. Мы полагаем, что ток смещения мал и значительно меньше тока проводимости:

$$\left|\frac{\partial D}{\partial t}\right| \ll |\vec{j}|. \tag{21.2}$$

В то же время пренебрегать членом $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в первом уравнении системы нет никаких оснований.

Выполнение неравенства (21.2) означает также, что $\operatorname{rot} \vec{H}$ заметно отличается от нуля только в областях, где наблюдается направленное

движение зарядов; для вещества это токи проводимости. Поэтому в квазистационарном случае принимают, что токи представляют собой единственный источник вихревого магнитного поля.

К условиям квазистационарности следует также добавить общее для электродинамики вещества требование постоянства γ, ε, μ. Названные условия выполняются для очень широкого круга явлений, связанных с переменными токами в веществе, для явления электромагнитной индукции, так что квазистационарные процессы лежат в основе огромного числа технических применений полей и токов.

21.2. Уравнения квазистационарного поля. Выпишем систему уравнений Максвелла для квазистационарного поля:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}, \quad (3) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, & (2) \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \varrho, \quad (4) \end{cases} \tag{21.3}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

К ней нужно добавить условие непрерывности тока. Оно следует из закона сохранения заряда (1.6); последнее преобразуется с учетом четвертого уравнения системы и условия (21.2):

$$0 = \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{j} + \operatorname{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \operatorname{div}\vec{j},$$

т. е.

$$\operatorname{div}\vec{j} \simeq 0. \tag{21.4}$$

Это значит, что линии тока для квазистационарных процессов являются квазизамкнутыми.

Если для стационарных процессов в веществе система основных уравнений распадалась на электрическую и магнитную подсистемы, связанные только током, то теперь связь подсистем теснее: электрическое поле имеет вихревую составляющую, обусловленную переменным магнитным полем.

Для анализа токов присоединим к системе уравнение закона Ома, которое мы считаем выполняющимся в квазистационарных полях:

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

На основании закона Ома, условия (21.4) и четвертого уравнения системы (21.3) заключаем, что, как и при постоянных токах, объемные заряды в замкнутой цепи при квазистационарных переменных токах отсутствуют.

В формуле закона Ома учтем возможность действия в замкнутых цепях переменного тока сторонних полей, не отраженных системой уравнений (21.3). Как и в случае постоянных токов, имеем

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \tag{21.5}$$

Уравнения квазистационарного поля нетрудно записать и в потенциалах, опираясь на общие уравнения (16.3)

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho, \end{cases} \tag{21.6}$$

если

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{21.7}$$

Понятно, что теперь $\vec{j}$ и ϱ – функции времени, хотя уравнения (21.6) дифференцирования по времени не содержат. Время играет роль параметра, от которого зависят величины ϱ, $\vec{j}$, $\vec{A}$ и φ. В соответствии с уравнениями (21.6) изменение потенциалов происходит во времени синхронно, без запаздывания, с изменением плотностей заряда и тока. Согласно (21.7) напряженность электрического поля $\vec{E}$ имеет потенциальную и вихревую составляющие.

21.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Выпишем первое уравнение из системы (21 3) для квазистационарного поля в веществе:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Данное соотношение выражает закон электромагнитной индукции: изменения магнитного поля во времени порождают вихревое электрическое поле. В проводящей среде это наведенное электрическое поле вызовет движение зарядов – возникнет индукционный ток. Магнитное поле действует как источник тока и может быть охарактеризовано соответствующей ЭДС.

Как показано в § 2, п. 2.2, исследуемое уравнение может быть представлено в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Вклад в интеграл дает только вихревая составляющая вектора $\vec{E}$. *Циркуляция напряженности для вихревой составляющей электрического поля носит название электродвижущей силы индукции.*

Итак, в проводящей среде под действием переменного магнитного поля возникают ЭДС индукции и индукционный ток, линии вектора $\vec{j}$ для которого совпадают с линиями вектора напряженности вихревого электрического поля. Особенно важен для технических приложений замкнутый линейный проводник, помещенный в переменное магнитное поле. Контур интегрирования следует совмещать с контуром проводника. ЭДС в таком случае относится к данному проводнику.

Следует заметить, что формула закона Фарадея

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{21.8}$$

сейчас записана для неподвижного проводника. Предполагается, что магнитный поток $\Phi = \int\limits_S \vec{B} d\vec{S}$ изменяется с течением времени только в силу изменения вектора $\vec{B}$. Но проводник или его части могут двигаться в пространстве, и по этой причине также может изменяться магнитный поток, пронизывающий контур проводника. Поэтому важно установить, чем сопровождается движение проводника в магнитном поле.

Рассмотрим свободные заряды в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле со скоростью $\vec{v}$. Заряды вовлекаются проводником в упорядоченное движение со скоростью движения участков проводника; на заряды действует магнитная составляющая силы Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$$

Относя силу к величине заряда, получаем некоторое эффективное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_{эф} = [\vec{v}\vec{B}].$$

Следовательно, и в постоянном магнитном поле при движении проводника в нем возбуждается ЭДС:

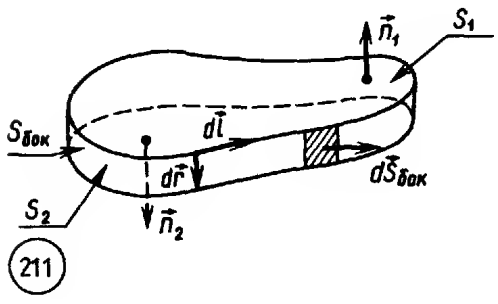
$$\mathcal{E}_{инд} = \oint\limits_L [\vec{v}\vec{B}]\, d\vec{l}\,. \qquad (21.9)$$

Дальнейшие рассуждения и преобразования выполним с помощью рисунка 21.1. Если элемент проводника $d\vec{l}$ сместился за время dt на отрезок $d\vec{r}$, то $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, а вместо формулы (21.9) получим

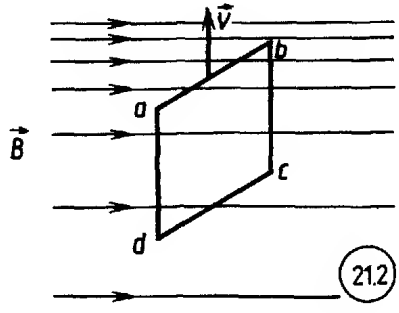
$$\mathcal{E}_{инд} = \frac{1}{dt}\oint\limits_L [d\vec{r}\,\vec{B}]\, d\vec{l} = \frac{1}{dt}\oint\limits_L [d\vec{l}\;d\vec{r}]\,\vec{B} = -\frac{1}{dt}\int\limits_{S_{бок}} \vec{B} d\vec{S}\,,$$

где $S_{бок}$ – поверхность, описанная в пространстве контуром тока за время ∂t.

Вычислим поток индукции через замкнутую поверхность тела, образованного поверхностями, стягивающими проводник в моменты t и $t + dt$ (основания) и описанной проводником при движении



211



21.2

(боковая). Так как поток вектора индукции $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, то

$$\int_{S_1} \vec{B}d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B}d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{B}d\vec{S} = 0,$$

отсюда

$$-\int_{S_{бок}} \vec{B}d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B}d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B}d\vec{S}.$$

Выбирая положительное направление нормалей к поверхностям, как указано на рисунке, и пользуясь выражением для $\mathcal{E}_{инд}$, имеем

$$\mathcal{E}_{инд} = \frac{1}{dt}[\Phi(t) - \Phi(t + dt)] = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi(t)$ – поток индукции через поверхность, стягивающую контур в момент времени t.

При выводе этой формулы имелось в виду, что поток вектора $\vec{B}$ через контур проводника изменяется вследствие движения всего контура, а также его отдельных частей, т. е. изменения формы и размеров контура. Это можно отразить в обозначениях:

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (21.10)$$

(В отличие от формулы (21.8) здесь использован знак полной производной по времени.)

Таким образом, ЭДС индукции возникает как в движущемся проводнике, так и в неподвижном, хотя причина изменения потока индукции в этих двух случаях неодинакова.

С точки зрения наблюдателя в некоторой инерциальной системе отсчета, на основании исходных положений электродинамики явление электромагнитной индукции в неподвижном проводнике описывается первым уравнением системы Максвелла и по своей природе обусловлено возникновением вихревого электрического поля при изменении магнитного В движущемся же проводнике ЭДС индукции обусловлена действием силы Лоренца на электрические заряды.

Сопоставим формулы (21.8) и (21.10), опираясь на релятивистские преобразования векторов поля. Замкнутый контур с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($v \ll c$) движется поступательно в неоднородном магнитном поле. Из рисунка 21.2 видно, что отрезки проводника пересекают линии магнитного поля. Свяжем с контуром штрихованную систему отсчета. Согласно формулам преобразования векторов поля (13.5) в штрихованной системе имеет место электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}' = [\vec{v}\vec{B}].$$

Циркуляция напряженности $\vec{E}'$ по контуру проводника и есть ЭДС индукции.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L [\vec{v}\vec{B}]\,d\vec{l}\,.$$

Такую же ЭДС согласно формуле (21.9) фиксирует и наблюдатель в нештрихованной системе, где проводник движется. Однако наблюдатели в разных системах относят возникновение ЭДС к разным причинам: наблюдатель в штрихованной системе — к вихревому электрическому полю, а наблюдатель в нештрихованной — к силе Лоренца По условиям задачи в нерелятивистском приближении изменение магнитного потока $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$, вызванное движением проводника в нештрихованной ИСО, и изменение магнитного потока $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t'}\right)$, происходящее в штрихованной ИСО вследствие изменения индукции поля, равны друг другу, т. е.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi'}{\partial t'}.$$

Таким образом объясняется совпадение формулировок закона электромагнитной индукции для этих двух случаев.

Часто пишут одну общую формулу, имея в виду обе причины изменения потока индукции магнитного поля через замкнутый контур проводника. Вид общей формулы совпадает с формулой (21.10).

Обратимся теперь к системе проводников, связанных магнитным взаимодействием, т. е. общим магнитным полем. Согласно формуле (20.20) поток, пронизывающий контур i-го проводника равен:

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k.$$

Он зависит от силы тока в этом и других проводниках, от формы, размеров, взаимного расположения проводников в пространстве При изменении всех этих факторов возникает ЭДС индукции. В общем случае

$$\mathcal{E}^{(i)}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_k \frac{dL_{ik}}{dt} I_k - \sum_k L_{ik}\frac{dI_k}{dt}. \qquad (21.11)$$

Практически важен частный случай, когда изменяются токи, а коэффициенты L_{ik} неизменны. Тогда

$$\mathcal{E}^{(i)}_{\text{инд}} = \sum_k L_{ik}\frac{dI_k}{dt}. \qquad (21.11\text{-а})$$

Для одного (уединенного) неподвижного проводника говорят о явлении самоиндукции, которое состоит в возбуждении индукционной ЭДС и индукционного тока в цепи при любых изменениях силы тока в ней. ЭДС самоиндукции находится по формуле

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (21.11\text{-б})$$

Направление тока самоиндукции таково, что он препятствует изменению тока, его вызвавшего. (Переменные токи обладают, таким образом, свойством, напоминающим инертность тел.)

Пример 21.1 **Вывод интегрального закона Ома для замкнутого проводника, находящегося в переменном магнитном поле.**

Воспользуемся дифференциальной формулой (21.5)

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

Напряженность поля $\vec{E}$ определяется системой уравнений (21.3) для квазистационарного поля, поэтому расчет и его результат отличаются от рассмотренного ранее для постоянного тока.

Интегрируя равенство (21.5) по замкнутому контуру, получаем

$$\oint_L \frac{\vec{j}\,d\vec{l}}{\gamma} = \oint_L \vec{E}d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{\text{ст}}d\vec{l} \qquad (1)$$

Так как теперь $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ и не равен нулю, как в стационарном поле, первый интеграл в правой части не обращается в нуль. Для его вычисления используем формулу

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

После подстановки этого выражения имеем

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_L \vec{A}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Остальные члены в равенстве (1) преобразуются так же, как это было сделано в § 19, п. 19.4. В итоге приходим к закону Ома для замкнутого контура в переменном магнитном поле:

$$IR = \mathcal{E}_{\text{ст}} - \frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Пример 21.2. **Расчет токов для системы замкнутых проводников с переменным током.**

Имеется несколько неподвижных замкнутых линейных проводников. Они связаны в единую систему общим для них квазистационарным электромагнитным полем. Изменения магнитного поля порождают индукционную ЭДС и индукционные токи в проводниках, те в свою очередь влияют на поле и т. д. Эти процессы можно описать, используя закон Ома, найденный в предыдущем примере. Для отдельного контура

$$I_k R_k = \mathcal{E}^{\,k}_{\text{ст}} - \frac{\partial\Phi_k}{\partial t}; \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ток в каждом контуре оказывается зависящим от изменения тока в нем и в остальных контурах. Последнее становится особенно наглядным, если использовать формулу (21.11-а), выражающую поток индукции через изменения токов в цепях. После подстановки имеем

$$I_k R_k = \mathcal{E}^{\,k}_{\text{ст}} - \sum_{i=1}^{N} L_{ik}\frac{dI_k}{dt}. \qquad (21\ 12)$$

Таким образом, при заданных ЭДС и параметрах контуров R_k, L_{ik}, а также при заданных начальных значениях силы тока все токи могут быть определены в любой момент времени из уравнений (21.12).

Уравнения (21.12) являются основой для расчета квазистационарных процессов в цепях переменного тока в электротехнике и радиотехнике.

Пример 21.3. Ток в квазизамкнутой цепи с переменной ЭДС.

Для электротехники и радиотехники важен случай цепи, содержащей конденсатор с емкостью C и дроссель с индуктивностью L. (Емкость конденсатора C и индуктивность катушки L, точнее, коэффициент самоиндукции, могут значительно превосходить эти параметры в других частях цепи. Данные свойства считаются «сконцентрированными» в конденсаторе и дросселе.)

Цепь, по существу, конденсатором разорвана, однако благодаря увеличению и уменьшению заряда на обкладках конденсатора это не мешает возникновению колебаний силы тока в остальной части цепи. Поэтому цепь уподобляется замкнутому контуру.

Проинтегрируем уравнение $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$ вдоль всей цепи от одной обкладки конденсатора до другой:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\,d\vec{l}}{\gamma} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{ст}d\vec{l} \qquad (1)$$

Интеграл в левой части равенства приводится к произведению IR (см. § 19, п. 19.4). Второй интеграл в правой части есть ЭДС. Первый интеграл разобьем на два слагаемых, используя формулу (21.7)

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = -\int_1^2 \operatorname{grad}\varphi d\vec{l} - \int_1^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\vec{dl}.$$

Вычислим первое слагаемое в правой части:

$$\int_1^2 \operatorname{grad}\varphi d\vec{l} = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{C},$$

где Q – заряд конденсатора, а C – его емкость. Учитывая также, что геометрически разрыв цепи конденсатора мал по сравнению со всей протяженностью цепи, для второго слагаемого имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \vec{A}d\vec{l} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L\frac{dI}{dt}.$$

Подставим найденные выражения в (1). Получаем

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{ст}. \qquad (2)$$

Продифференцируем уравнение (2) по времени и учтем равенство

$$\frac{dQ}{dt} = I,$$

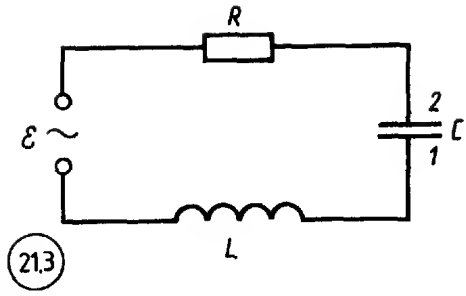
вытекающее из определения силы тока.

Окончательно получаем

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{ст}. \qquad (21\ 13)$$

Полезно заметить, что знак разности потенциалов соответствует знаку заряда на верхней обкладке конденсатора (рис 21.3). А это означает, что положительный ток в цепи идет от точки (1) к точке (2) и увеличивает заряд на второй обкладке.

Уравнение (21.13) является исходным для всех расчетов в цепях переменного тока С его помощью рассчитывается, например, процесс, происходящий в колебательном контуре, выводится закон Ома для цепи переменного тока при наличии в ней емкости и индуктивности, исследуются резонансы токов и напряжений и т. д.



§ 22. Расчет тока в нелинейном проводнике. Скин-эффект

Скин-эффект состоит в повышении плотности переменного тока при приближении к поверхности проводника, по которому течет ток. Это явление имеет существенное значение при передаче электрической энергии по проводам: не все сечение провода используется одинаково эффективно. Следует заметить, что явление выходит за рамки линейной модели тока, так как плотность тока неодинакова на всем сечении.

Пусть проводящая однородная среда занимает полупространство $y \geq 0$ (рис. 22.1). Уравнения квазистационарного поля в среде запишем в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \tag{22.1}$$

Продифференцируем первое из них по времени и заменим с помощью второго производную $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ в полученном выражении. Имеем

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Учитывая тождество (П. II, 27), а также условие $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, получаем

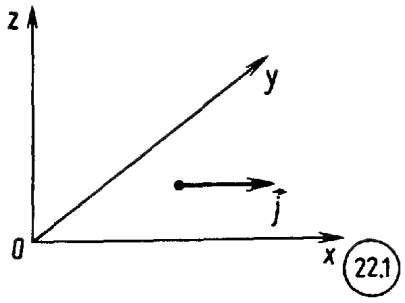
$$\Delta \vec{E} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{22.2}$$

Точно так же можно показать, что

$$\Delta \vec{H} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \tag{22.3}$$

Введем ток, текущий параллельно оси Ox во всем полупространстве, где $y \geq 0$:

$$j_x = j_x(y, t), \; j_y = 0, \; j_z = 0.$$



22.1

j_x зависит только от y в силу симметрии задачи; в плоскости, параллельной xOz, все точки равноправны.
Соответственно

$$E_x = E_x(y,\ t),\ E_y = 0,\ E_z = 0.$$

Уравнение (22.2) переходит в более простое:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{22.4}$$

Ищем решение уравнения (22.4) в виде

$$E_x = E_{0x} e^{i\omega t}.$$

Подстановка пробного решения приводит к уравнению для амплитуды:

$$\frac{d^2 E_{0x}}{dy^2} = i\omega\gamma\mu\mu_0 E_{0x}. \tag{22.5}$$

Его следует решать с помощью составления характеристического уравнения, причем удобно ввести обозначение:

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{2}\gamma\mu\mu_0\omega.$$

Получаем

$$k^2 = \frac{2i}{l^2}.$$

Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня:

$$k_{1,2} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{2i} = \pm\frac{1}{l}(1 + i).$$

Сейчас можно записать общее решение уравнения (22.5):

$$E_{0x} = C_1 e^{\frac{y}{l}} e^{i\frac{y}{l}} + C_2 e^{-\frac{y}{l}} e^{-i\frac{y}{l}}.$$

Первое слагаемое лишено физического смысла из-за неограниченного роста напряженности поля по мере углубления в проводник. Остается

$$E_{0x} = C_2 e^{-\frac{y}{l}} e^{-i\frac{y}{l}}. \tag{22.6}$$

Соответственно напряженность электрического поля и плотность тока изменяются по закону

$$E_x = E_0 e^{-\frac{y}{l}} e^{i\left(\omega t - \frac{y}{l}\right)}; \qquad (22.6\text{-а})$$

$$j_x = j_0 e^{-\frac{y}{l}} e^{i\left(\omega t - \frac{y}{l}\right)}, \qquad (22.7)$$

где $E_0 = C_2$; $j_0 = \gamma C_2$.

Величины $E_x(y, t)$ и $j_x(y, t)$ уменьшаются при удалении от поверхности в глубь проводника. Чем выше частота тока (а также больше параметры γ и μ), тем быстрее убывает ток. Он ослабевает в e раз (т. е. примерно в 3 раза) на глубине l. Эта постоянная дает количественную меру скин-эффекта.

Из формул (22.6) и (22.7) также видно, что процесс проникновения тока и электрического поля в глубь проводящей среды имеет характер затухающих с глубиной волн. Обычно амплитуда волны настолько быстро уменьшается с ростом y, что волновой характер решения не имеет существенного значения. Так, для меди при частоте 50 Гц $l \approx 1$ см, а при $\omega = 10^5$ Гц $l \sim 10^{-3}$ см. Эти расстояния значительно меньше длины волны.

Напряженность магнитного поля можно найти с помощью уравнений (22.1) по известной напряженности электрического поля. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу. Магнитное поле затухает при углублении в проводящую среду по тому же закону, что и электрическое.

Методические указания и рекомендации

I. Квазистационарные процессы довольно подробно изучаются в курсе общей физики и в курсе электротехники. Задача курса теоретической физики — выявить их связь с общими вопросами электродинамики, получить основные соотношения из уравнений Максвелла.

В настоящей главе внимание сосредоточено на квазистационарном поле и явлении электромагнитной индукции в линейных проводниках. Остальное (иллюстрации общих положений, выходы в электротехнику) отнесено к примерам расчетов по соответствующим формулам и уравнениям. Они предназначены для самостоятельной работы студентов.

II. При изучении главы полезно обратить внимание на следующие моменты. Обдумайте подходы к явлению электромагнитной индукции в курсе физики средней школы, общей физики. Установите связь знака «минус» в формуле Фарадея с правилом Ленца. Установите соотношение направлений векторов $\vec{E}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ при электромагнитной индукции в однородном проводнике, заполняющем все пространство. Выполните упражнения.

Упражнения

1. Металлический стержень вращается вокруг оси, проходящей на расстоянии одной трети от конца в однородном поле, перпендикулярном плоскости вращения. Определить разность потенциалов на концах стержня, если $l = 1{,}2$ м, $\omega = 6$ с$^{-1}$, $B = 10^{-2}$ Тл.

2. Проводящая рамка, имеющая сопротивление R, поворачивается в магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной полю. Определить заряд, протекающий через гальванометр, соединенный с рамкой.

3. Найти закон изменения тока в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C.

На основании уравнения (21.13) имеем

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0.$$

Решая уравнение, получим

$$I = I_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \alpha\right).$$

4. Вывести закон Ома для цепи переменного тока.

Отыскивая решение уравнения (21.13) для $\mathcal{E}_{ст} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$ в виде $I = I_0 e^{-i\omega t}$, получим

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Выделяя вещественную часть, имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}_0\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},\quad \operatorname{tg}\varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R}.$$

5. Вывести правило Ленца на примере замкнутого проводящего контура индуктивностью L, помещенного в магнитное поле.

Для движущегося проводника нужно определить направление индукционного тока, а по нему – силы Ампера, действующей на проводник.

В случае неподвижного проводника следует использовать формулу закона электромагнитной индукции в применении к замкнутому проводнику $\left(IR = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$ и исследовать взаимосвязь направления индукционного тока и его поля с убывающим или возрастающим внешним полем.

6. Найти изменение силы тока со временем при замыкании и размыкании цепи, содержащей катушку индуктивностью L. В цепи действует постоянная ЭДС $\mathcal{E}$. Сопротивление цепи R. Емкостью проводников пренебречь.

В данном случае уравнение (21.13) примет вид

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}=0.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$I=A+Be^{-\frac{R}{L}t},$$

где A и B — произвольные постоянные. Они определяются из начальных и конечных условий задачи.

При замыкании цепи $I(0)=0$ и $I(\infty)=\frac{\mathcal{E}}{R}$, так как в конце концов при постоянной ЭДС устанавливается постоянный ток. Отсюда

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

При размыкании цепи с установившимся постоянным током $\left(I_0=\frac{\mathcal{E}}{R}\right)$ имеем $I(0)=I_0$ и $I(\infty)=0$. Это дает зависимость

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

7. Найти изменение силы тока при замыкании и размыкании цепи, содержащей электрическую емкость C и постоянную ЭДС.

С помощью уравнения (21.13) имеем

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0.$$

Это уравнение допускает общее решение

$$I=Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

При замыкании цепи получается кратковременный ток зарядки конденсатора источником постоянной ЭДС. В первый момент, пока конденсатор не заряжен и не создает «противополя», ток ограничивается только сопротивлением цепи и равен $\frac{\mathcal{E}}{R}$. Отсюда

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Если $\mathcal{E}=0$, то ток может появиться только при заранее заряженном конденсаторе. В этом случае

$$I=\frac{\Delta\varphi}{R}e^{-\frac{t}{RC}},$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов обкладок.

Установившийся режим соответствует нулевому току. Поэтому при размыкании цепи тока не возникает.

8. Изучить превращения энергии при замыкании и размыкании цепи переменного тока, содержащей индуктивность и емкость, пользуясь результатами предыдущих задач.

Глава IX
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕЩЕСТВЕ

В вещественной среде существуют не только стационарные и квазистационарные поля, но и распространяются электромагнитные волны. В последней главе курса проанализированы особенности электромагнитных волн в веществе.

Свет по своей макроскопической природе — электромагнитная волна. Ниже показано, как некоторые исходные положения оптики раскрываются на основе теории Максвелла.

§ 23. Электромагнитные волны в веществе

23.1. Плоские волны в идеальном диэлектрике. Допустим, что пространство заполняет однородный диэлектрик с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ и проводимостью, равной нулю ($\gamma = 0$). Такая модель диэлектрика уже использовалась при изучении стационарных процессов, и она достаточно точно отображает реальные свойства сред в стационарных полях. В случае переменных полей, особенно при высоких частотах колебаний, указанные допущения оказываются слишком грубыми. Тем не менее с помощью этой простой модели удается получить многие важнейшие качественные заключения об электромагнитных, в частности световых, волнах в веществе.

Воспользуемся уравнениями поля в потенциалах для однородного диэлектрика (16.3). При отсутствии свободных зарядов применяется волновая калибровка: $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (см. § 9, п. 9.2). Уравнения приобретают вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0; \tag{23.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{23.2}$$

Общее решение волнового уравнения (23.1) можно представить в виде суперпозиции гармоник всевозможных частот и направлений распространения. Отдельная гармоника есть плоская монохроматическая волна:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \tag{23.3}$$

Она отличается от таких же по форме волн в вакууме скоростью распространения. По виду уравнения (23.1) заключаем, что в среде фазовая скорость волны равна:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{23.4}$$

где c – фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме.

Соответственно изменяется соотношение между волновым числом k и циклической частотой ω. Если для вакуума выполнялось равенство $k = \frac{\omega}{c}$, то теперь для волн в веществе

$$k = \frac{\omega}{c'} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}. \tag{23.5}$$

К векторам поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перейдем с помощью формул их связи с потенциалами:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Все вычисления совершенно аналогичны выкладке в § 9, п. 9.2. Получим для волны в диэлектрике

$$\vec{E} = -\omega\vec{A}_0\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad \vec{B} = [\vec{A}_0\vec{k}]\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \tag{23.6}$$

Условие (23.2) дает $\vec{A}_0 \perp \vec{k}$, а с учетом формул (23.6) далее следуют поперечность электромагнитных волн в веществе, правило правой тройки для последовательности векторов $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$, связь между модулями векторов поля:

$$B = \frac{E}{c'}. \tag{23.7}$$

Последнее соотношение приобретает симметричную форму, если его записать для модулей векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$H\sqrt{\mu\mu_0} = E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{23.8}$$

Из формул (23.6) также видно, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются во времени синфазно.

В идеальном диэлектрике ε не зависит ни от величины напряженности поля $\vec{E}$, ни от его частоты ω. Поэтому фазовая скорость распространения волн в среде не зависит от частоты и равна групповой скорости (см. пример 9.1). Говорят, что идеальная среда, как и вакуум, не обладает дисперсией. Однако опыт свидетельствует о зависимости распространения электромагнитных волн от частоты, что объясняется в соответствии с формулой (23.4) зависимостью диэлектрической проницаемости среды от частоты колебаний поля:

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega).$$

(Для диэлектриков $\mu \approx 1$, и эту величину можно исключить из рассмотрения.)

Таким образом, реальные среды обладают дисперсией Определяя волновое число для среды с дисперсией тем же соотношением (23.5), что и для идеального диэлектрика, получаем для произвольного волнового поля гармоники вида (23.6)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$
$$\vec{B} = \vec{B} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t).$$

По-прежнему векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ образуют правую тройку, причем $E = c'B$, но теперь скорость волн зависит от частоты:

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}.$$

Поэтому усложняется зависимость от частоты волнового вектора:

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c}.$$

(Соответственно длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$.)

При наличии дисперсии групповая скорость (скорость волнового пакета или скорость переноса энергии) может заметно отличаться от фазовой скорости гармоник.

Вычислим плотность энергии и импульса волны в среде. Согласно общей формуле (16.22) имеем

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}).$$

С помощью равенства (23.8) получим

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \vec{E}\vec{D}, \tag{23.9}$$

или

$$w = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \vec{H}\vec{B}, \tag{23.10}$$

что свидетельствует о равном вкладе электрической и магнитной составляющей поля в энергию волны.

Плотность потока энергии определяется соотношением (16.23)

$$\vec{\sigma} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Эта формула может быть записана в нескольких видах:

$$\vec{\sigma} = c'(\vec{E}\vec{D})\vec{k}_0 = c'(\vec{H}\vec{B})\vec{k}_0 = c'w\vec{k}_0, \tag{23.11}$$

где $\vec{k}_0 = \frac{\vec{k}}{k}$.

Обратимся теперь к импульсу волн в веществе. Плотность импульса определяется формулой (16.26). Сопоставим выражение для плотности импульса

$$\vec{g} = [\vec{D}\vec{B}] \tag{23.12}$$

с формулой для плотности энергии и потока энергии. Векторы $\vec{g}$ и $\vec{\sigma}$ имеют одинаковое направление. С помощью соотношений (23.4) и (23.11) заключаем, что для их модулей справедливо равенство

$$\sigma = g\,(c')^2,$$

откуда следует

$$w = gc'. \tag{23.13}$$

В веществе релятивистское соотношение между энергией и импульсом $E = pc$ оказалось нарушенным, ибо в формулу (23.13) вместо c входит c'. Чтобы его сохранить, иногда определяют плотность импульса электромагнитного поля в веществе не соотношением (23.12), а соотношением

$$\vec{g} = \frac{[\vec{D}\vec{B}]}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{23.14}$$

Теперь, как это нетрудно подсчитать, $w = gc$ в соответствии с теорией относительности. Однако в таком случае теряется связь между импульсом и потоком энергии: энергия переносится со скоростью c', а импульс соответствует движению энергии со скоростью c.

По указанной причине считают, что нельзя однозначно определить импульс электромагнитного поля в рамках феноменологической модели вещества, отраженной в материальных уравнениях

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},\ \vec{j} = \gamma\vec{E}.$$

23.2* Электромагнитные волны в однородной проводящей среде. Рассмотрим вопрос о распространении электромагнитных волн в проводящей среде, т. е. при условии $\gamma \neq 0$. Будем, как и в других случаях, опираться на уравнения поля в потенциалах, для того чтобы использовать их готовые решения. Уравнения (16.3) для векторного потенциала поля совместно с материальным уравнением для зависимости плотности тока в среде от проводимости $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ приводит к следующему исходному для поставленной задачи уравнению:

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\gamma\mu\mu_0\vec{E}. \tag{23.15}$$

Объемные заряды в проводниках отсутствуют. Поэтому при-

меним волновую калибровку потенциала. Если $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, то уравнение (23.15) примет вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \gamma\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \tag{23.16}$$

Ищем решение уравнения (23.16), совпадающее по форме с плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси Ox:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - qx)}. \tag{23.17}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (23.16) приводит к равенству

$$-q^2 + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\gamma\mu\mu_0\omega = 0.$$

Таким образом, модуль волнового вектора q в предлагаемом решении оказался комплексным числом:

$$q^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2 - i\omega\gamma\mu\mu_0. \tag{23.18}$$

Чтобы выяснить физический смысл соответствующей волны, выделим в комплексном q действительную и мнимую части:

$$q = a - ib.$$

Возведя последнее равенство в квадрат и сравнивая с уравнением (23.18), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2, \\ ab = \frac{1}{2}\omega\gamma\mu\mu_0. \end{cases}$$

Решая систему относительно a и b, имеем

$$b = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0\gamma c^2}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]} = \pm s; \tag{23 19}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0\gamma c^2}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]} = \pm k, \tag{23 20}$$

откуда $q = \pm(k - is)$, а решение для потенциала поля в проводнике таково:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{\pm sx} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Это волна с вещественным волновым вектором k и переменной вдоль луча амплитудой. Поскольку физического смысла неограниченно растущая амплитуда не имеет, то при $x \geq 0$ используется

только решение со знаком «минус» перед s. Окончательно для волны потенциала, распространяющейся в положительном направлении оси Ox, имеем

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \tag{23.21}$$

Отсюда видно, что волна в проводящей среде затухает. Затухание характеризуется параметром s, зависящим от свойств среды и частоты волны. Для всех веществ, в которых предположение о постоянстве ε и μ имеет смысл, $\mu \approx 1$. Поэтому коэффициент затухания s определяется диэлектрической постоянной ε и проводимостью среды γ. При низких частотах $s \approx \sqrt{\frac{1}{2}\gamma\omega\mu\mu_0}$. Этот параметр уже получен в задаче о скин-эффекте (§ 22). (Связь явлений распространения волн в проводящей среде и скин-эффекта как соответствующего предельного случая очевидна.)

Если среда является хорошим проводником, то затухание так велико, что о распространении волн в ней говорить не приходится. Количественная оценка для металлов с помощью формулы (23.19) показывает, что для частот видимого света амплитуда волн уменьшается в e раз на отрезке $\Delta x = \frac{1}{s} \sim 10^{-8}$ м, т. е. на расстояниях, много меньших длины волны. Это значит, что волны в проводнике не распространяются.

При падении электромагнитной волны на поверхность проводника происходит поглощение и отражение. Переменное электромагнитное поле возбуждает токи в очень тонком $\left(\sim \frac{1}{s}\right)$ поверхностном слое проводника, а с их помощью генерируется отраженная или рассеянная волна, часть падающей энергии переходит в джоулево тепло. На этом свойстве проводников основано экранирование от электромагнитных волн с помощью металлических оболочек, футляров, кожухов.

Как показывает формула (23.20), в среде имеет место зависимость волнового вектора k от проводимости γ и диэлектрической проницаемости ε, носящая название *дисперсии проводящей среды*. Дисперсия приводит к зависимости скорости распространения волн (а значит, и показателя преломления проводящей среды) от частоты. В соответствии с формулой (23.21) в среде

$$c' = \frac{\omega}{k(\omega)} \tag{23.22}$$

функция $k(\omega)$ задана соотношением (23.20).

Рассмотрим сначала предельный случай идеального диэлектрика ($\gamma = 0$).

Из формулы (23.20) получим

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}.$$

Подставляя найденное значение k в формулу (23.22), имеем

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{23.23}$$

в полном соответствии с данными § 23, п. 23.1.

Теперь обратимся к слабопроводящей среде с малой, но отличной от нуля проводимостью и выполним оценку для k. Считая γ малой величиной, с помощью формулы (23.20) имеем

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\left(1 + \frac{\mu_0^2\gamma^2 c^4}{4\varepsilon^2\omega^2}\right). \tag{23.24}$$

Как и ожидалось, волновой вектор и скорость волн в проводящей среде оказались зависящими от частоты колебаний и проводимости среды. Имеет место дисперсия проводящей среды.

Определим также характер волн для векторов поля в слабопроводящей среде, для чего найдем векторы поля через потенциал (23.21). При волновой калибровке

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega\vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = (s + ik)\,[\vec{A}_0\vec{k}_0]\, e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Для того чтобы придать этим выражениям удобный для анализа вид, необходимо записать комплексные множители $i\omega$ и $s + ik$ в экспоненциальной форме, т. е. выделить вещественные амплитуды волн. Поскольку

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i \operatorname{arc tg} \frac{b}{a}},\quad i\omega = \omega e^{i\frac{\pi}{2}},$$

то

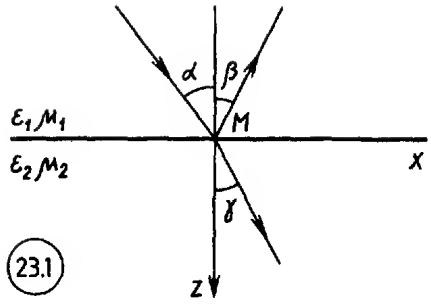
$$\vec{E} = -\omega\vec{A}_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})},$$

$$\vec{B} = \sqrt{s^2 + k^2}\,\,[\vec{A}_0\vec{k}_0]\, e^{-sx} e^{i(\omega t - kx + \operatorname{arc tg}\frac{k}{s})}. \tag{23.25}$$

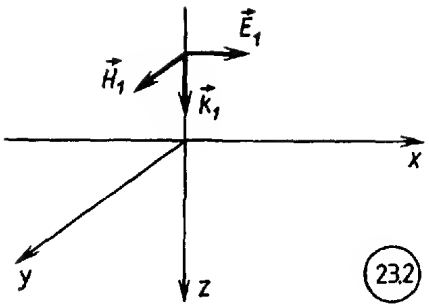
Формулы (23.25) показывают, что в слабопроводящем веществе имеют место затухающие плоские волны со сдвигом фаз между колебаниями векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и с измененным по сравнению с вакуумом соотношением между их модулями. Но по-прежнему волны поперечны, векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ составляют правую тройку.

23.3. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе двух диэлектриков. В рамках классической электродинамики можно получить законы отражения и преломления электромагнитных волн на границе двух сред.

Выделим участок границы раздела, совпадающий с плоскостью Oxy (рис. 23.1). Пусть плоская волна из первой среды падает на границу под некоторым углом α. Она частично проникает во вторую среду. Опыт подсказывает также наличие отраженной волны. Связь между этими тремя волнами содержится в граничных условиях,



23.1



23.2

вытекающих из уравнений Максвелла. Существенно, что уравнениям, выражающим граничные условия, можно удовлетворить, если рассматривать именно три волны: падающую, отраженную и преломленную.

Итак, задаваясь некоторой гармоникой для падающей волны, имеем

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{10}\, e^{\,i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t)},\\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20}\, e^{\,i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t)},\\ \vec{E}_3 &= \vec{E}_{30}\, e^{\,i(\vec{k}_3\vec{r} - \omega_3 t)}.\end{aligned} \tag{23.26}$$

электрические векторы падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Нужно найти связь между амплитудами, частотами колебаний ω_1, ω_2, ω_3 и волновыми векторами падающей ($\vec{k}_1$), отраженной ($\vec{k}_2$) и преломленной ($\vec{k}_3$) волн. Для этого воспользуемся непрерывностью тангенциальной составляющей поля (граничным условием (16.17)):

$$E_{1t} + E_{2t} = E_{3t}. \tag{23.27}$$

Проанализируем соотношение (23.27) с учетом формул (23.26) в следующем порядке:

а) *Частота при отражении и преломлении не изменяется* Фиксируя некоторую точку на границе раздела, можно выделить одну временную зависимость в равенстве (23.27), записанном в проекции на некоторую ось:

$$Ae^{\,i\omega_1 t} + Be^{\,-i\omega_2 t} = Ce^{\,-i\omega_3 t}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях t, что возможно лишь при условии

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3. \tag{23.28}$$

б) *Лучи падающий, отраженный и преломленный лежат в одной плоскости.* Разделив равенство (23.27) на общий временной множитель, получаем соотношение вида

$$ae^{\,i\vec{k}_1\vec{r}} + be^{\,i\vec{k}_2\vec{r}} = ce^{\,i\vec{k}_3\vec{r}}.$$

Оно должно выполняться для всех точек границы раздела, что возможно лишь при условии

$$\vec{k}_1\vec{r} = \vec{k}_2\vec{r} = \vec{k}_3\vec{r}. \tag{23.29}$$

Пусть $\vec{r} \perp \vec{k}_1$, тогда $\vec{r} \perp \vec{k}_2$ и $\vec{r} \perp \vec{k}_3$, откуда и следует, что векторы $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}_3$ лежат в одной плоскости.

в) *Законы отражения и преломления.* Плоскость векторов $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ совпадает с плоскостью Oxz (см. рис. 23.1). Выберем начало вектора $\vec{r}$ на оси Ox. Из формулы (23.29) следует

$$k_1 \sin\alpha = k_2 \sin\beta = k_3 \sin\gamma.$$

Используя также связь между волновым вектором и частотой (см формулу (23.5)), имеем

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1},\ k_2 = \frac{\omega}{v_1},\ k_3 = \frac{\omega}{v_2}. \tag{23.30}$$

Отсюда получаются законы отражения и преломления:

$$\alpha = \beta,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{1\,2}. \tag{23.31}$$

Показатель преломления может быть выражен через диэлектрические характеристики вещества. При $\mu \approx 1$

$$n_{1\,2} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{23 32}$$

г) *Соотношения между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн.* Пусть волна падает перпендикулярно поверхности раздела (рис. 23.2), причем вектор $\vec{E}_1$ направлен по оси Ox. (Тогда вектор $\vec{H}_1$ направлен по оси Oy.) Используя свойства электромагнитных волн, запишем

$$E_{1x} = E_{10}e^{i(k_1 z - \omega t)},\ E_{1y} = E_{1z} = 0,$$

$$H_{1y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{1x},\ H_{1x} = H_{1z} = 0.$$

Эти формулы определяют поле падающей волны. Для отраженной волны, распространяющейся в обратном направлении, имеем

$$E_{2x} = E_{20}e^{i(k_2 z + \omega t)},\ E_{2y} = E_{2z} = 0,$$

$$H_{2y} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{2x},\ H_{2x} = H_{2z} = 0.$$

Преломленная волна запишется в виде

$$E_{3x} = E_{30}e^{i(k_3 z - \omega t)},\ E_{3y} = E_{3z} = 0,$$

$$H_{3y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{3x},\ H_{3x} = H_{3z} = 0$$

Снова используем граничные условия. Исходя из непрерывности

тангенциальной составляющей вектора $\vec{E}$ и тангенциальной составляющей вектора $\vec{H}$ на плоскости $z=0$ приходим к уравнениям

$$E_{1,0}+E_{2,0}=E_{3,0},$$
$$\sqrt{\varepsilon_1}E_{1,0}-\sqrt{\varepsilon_2}E_{2,0}=\sqrt{\varepsilon_2}E_{3,0}.$$

Решая систему, находим

$$E_{2,0}=\frac{1-n_{1,2}}{1+n_{1\,2}}E_{1,0},\quad E_{3,0}=\frac{2}{1+n_{1\,2}}E_{1,0} \tag{23.33}$$

Это и есть формулы связи амплитудных значений векторов поля при отражении и преломлении волн (при нормальном падении). С их помощью нетрудно сравнить интенсивности трех волн, а также найти поток энергии отраженной и преломленной волн. Соответствующие соотношения (для произвольного угла падения) были получены в начале XIX века Френелем на основании предположения о волновой природе света, когда об электромагнитных волнах еще ничего не было известно.

Более подробный анализ условий прохождения волны через границу раздела двух сред позволяет получить и другие важные сведения. Так, граничные условия приводят к совпадению фаз падающей волны и преломленной, тогда как отражение в зависимости от параметров сред и величины угла падения может произойти как в той же фазе, так и в противоположной. Удается также установить связь между составляющими поля при отражении и преломлении, имеющими разные поляризации, т. е разные направления вектора $\vec{E}$.

§ 24. Электромагнитная природа света

24.1. Свет – электромагнитные волны. Свет с макроскопической точки зрения представляет собой электромагнитные волны в вакууме или веществе, частота которых порядка $10^{14}\ldots10^{15}$ Гц. Установление тождественности природы света и электромагнитного поля было осуществлено исследованиями Фарадея, Максвелла, Герца, Лебедева и других ученых и явилось одним из важнейших достижений физики XIX века. До работ Фарадея и Максвелла электромагнитные и оптические явления считались совершенно независимыми. Электромагнитная природа света была предсказана Фарадеем и выявлена Максвеллом и Герцем в связи с волновыми решениями основных уравнений электродинамики. Изучая различные вопросы электродинамики, мы многократно имели дело с принципиальными для оптики проблемами. Так, найдено решение волнового уравнения в виде плоских волн и теоретически установлена скорость распространения их в веществе и вакууме, рассмотрены гармонические составляющие электромагнитного поля, соответствующие свету определенных частот, показана возможность представления любого волнового

поля в виде совокупности гармоник, т. е. теорстически обосновано спектральное разложение света, и т. д. Затрагивались и вопросы взаимодействия света с веществом, так как изучалось рассеяние волн. Прямое отношение к оптике имеют эффект Доплера, аберрация электромагнитных волн и ряд других вопросов электродинамики. Изучались также прохождение волн через вещество, явления отражения и преломления, дисперсия света.

Однако естественное световое поле имеет в связи со своим происхождением специфические особенности, не рассматривавшиеся нами ранее, при изучении общих положений электродинамики Выявление их также входит в вопрос о природе света.

24.2. Световое поле. Уравнения Максвелла для пустоты и однородного диэлектрика приводят к общему решению в виде суперпозиции плоских монохроматических волн всевозможных частот и направлений. Суперпозицией сферических волн всевозможных частот является решение для точечных источников К особого рода сферическим волнам (с амплитудой, зависящей от направления) сводится излучение систем в дипольном приближении; это излучение также может быть разложено на гармоники.

Таким образом, исходным объектом для теоретического исследования света и световых явлений в рамках классической электродинамики являются плоские (или сферические) монохроматические электромагнитные волны По своей природе источник света сводится к множеству отдельных атомов и молекул, испускающих электромагнитные волны без согласования друг с другом, т. е. свет представляет собой суперпозицию множества волн, исходящих от отдельных независимых источников. Благодаря высоким частотам колебаний и малым продолжительностям и интенсивностям отдельных составляющих экспериментально измсренные параметры излучения и действий света оказываются в оптике «усредненными» как по времени, так и в пространстве. Поэтому методы регистрации электромагнитных волн радиодиапазона оказываются неприменимыми к световым волнам.

Более того, отдельные акты излучения света атомами вещества и взаимодействия его с атомами имеют ярко выраженный квантовый характер и не описываются во всех деталях макроскопической электродинамикой. Световое поле в его макроскопических проявлениях есть усреднение сложноизменяющихся микрополей и усреднение квантовой картины взаимодействия фотонов и связанных в атомах электронов.

Некоторые важные детали такого усреднения удается понять с помощью сравнительно простой математической модели суперпозиции микрополей. Поскольку интенсивность (поток энергии) пропорциональна квадрату напряженности поля $\vec{E}$, то для средней по времени интенсивности света, состоящего из монохроматических составляющих всевозможных частот и одного направления, имеем

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\sum_k E_{k0}\cos(\omega_k t - \varphi_k)\right\}^2 dt = \frac{1}{T}\sum_k \int_0^T E_{k0}^2 \cos^2(\omega_k t - \varphi_k)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \sum_{k'} E_{k0}E_{k'0}\cos(\omega_k t - \varphi_k)\cos(\omega_{k'} t - \varphi_{k'})\, dt.$$

Если между частотами отдельных колебаний ω_k нет никакой связи, а изменение составляющих носит случайный характер (статистически независимы сдвиги фаз φ_k и амплитуды E_{0k}), то все интегралы, для которых $\omega_k \neq \omega_{k'}$, обращаются в нуль и получается

$$\overline{E^2} = \sum_k E_{k0}^2 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_k t - \varphi_k)\, dt = \sum_k \frac{1}{2} E_{k0}^2. \qquad (24.1)$$

Так как

$$\overline{E_k^2} = \frac{1}{2} E_{k0}^2,$$

то формула (24.1) имеет смысл равенства средней интенсивности поля сумме средних интенсивностей составляющих гармоник:

$$\overline{E^2} = \sum_k \overline{E_k^2}. \qquad (24.2)$$

Это положение подтверждается экспериментально для так называемого «естественного» света, т. е. света, испускаемого, например, множеством атомов твердого тела при тепловом движении. В теоретическом плане формула (24.2) очень важна, так как из нее следует, что в пределах соответствующего ей определения интенсивности в оптике можно пользоваться понятием некоторой строго монохроматической волны, на самом деле являющейся усреднением очень сложной картины микрополя.

Закон сложения интенсивностей (24.2) справедлив только при статистически независимых составляющих. Рассмотрим выходящий за рамки этой формулы случай сложения двух монохроматических волн с частотами ω_1 и ω_2, между которыми сохраняется постоянная разность фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда выкладка, аналогичная проделанной выше, дает для суммарного поля выражение

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}E_{1,0}^2 + \frac{1}{2}E_{2,0}^2 + \frac{2}{T}\int_0^T E_{1,0}E_{2,0}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\, dt. \qquad (24.3)$$

Интеграл в соотношении (24.3) не равен нулю, поэтому

$$\overline{E^2} \neq \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} \qquad (24.4)$$

В соответствии с формулой (24.3) имеют место и объясняются с помощью волновой теории явления интерференции и дифракции света. Но стоит подчеркнуть, что сами интерферирующие световые волны, как правило, есть результат усреднения несогласованных волн, поэтому вопрос о когерентности таких двух источников вовсе не тривиален. Обеспечить постоянство разности фаз колебаний во

времени и пространстве для двух различных естественных источников практически невозможно, и интерференция осуществляется, как известно, при разделении светового пучка от одного источника на части. Однако для квантовых генераторов электромагнитных волн – лазеров, в которых процесс излучения множества атомов или молекул согласован, проблема когерентности может быть снята: складываются действительно монохроматические поля. Волны, излучаемые лазерами, могут быть когерентны и во времени, и пространственно (см. [18]).

В связи с вопросом о монохроматическом свете необходимо сделать еще одно замечание. Выше в курсе говорилось, что на практике монохроматические электромагнитные волны не встречаются. Близкие же по частоте волны образуют волновой пакет. Сказанное справедливо и для световых волн. Поскольку ограниченное во времени излучение не монохроматично, то в оптике чаще всего имеют дело с волновыми пакетами, имеющими ограниченную протяженность во времени и пространстве. Замена пакета гармоникой допустима лишь при определенных оговорках. При узком интервале частот берется гармоника с частотой, принадлежащей середине интервала. Кроме того, пространственная и временная протяженность пакета должна быть велика.

Электромагнитные волны по своей природе поляризованы. Учитывая сложную картину действия отдельных несогласованных излучателей, дающих естественный свет, необходимо сделать вывод о наличии всевозможных поляризаций для отдельных компонент поля (24.1). Выделяя два независимых направления поляризации $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ в плоскости, перпендикулярной лучу, получим

$$\vec{E} = \sum_k \{\vec{e}_1 E_{0k} e^{i(\omega_k - \vec{k}\vec{r} + \varphi_k)} + \vec{e}_2 E_{0k} e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_k)}\}. \qquad (24.5)$$

Из последней формулы вытекает, что следует говорить о сложении интенсивностей для каждого из двух направлений поляризации отдельно; причем для направления $\vec{e}_1$ интенсивности складываются либо по формуле (24.2), либо по формуле (24.3). То же относится к направлению $\vec{e}_2$.

Приведенные в данном параграфе соображения о естественном свете позволяют в ряде случаев применить к световому полю законы и выводы классической электродинамики. Кроме рассмотренных выше положений, из уравнений Максвелла для вещества вытекает ряд важнейших для оптики законов, в том числе принцип Гюйгенса – Френеля. Таким образом, этот важнейший феноменологический принцип волновой теории получает в электродинамике теоретическое обоснование.

24.3.* Принцип Гюйгенса – Френеля. Принцип Гюйгенса – Френеля является одним из наиболее общих и конструктивных принципов волновой оптики. С его помощью удается теоретически вывести важные оптические законы отражения и преломления света,

дифракции и других явлений. Напомним содержание принципа. Пусть задан источник света L. В точке наблюдения M (рис. 24.1) имеют место колебания некоторой полевой величины (например, напряженности электрического поля), определяемые приходящей сюда сферической волной:

$$E(M) = \frac{a}{r'} e^{i(kr' - \omega t)}. \tag{24.6}$$

Окружим источник света замкнутой поверхностью S. Согласно принципу Гюйгенса – Френеля точечный источник может быть заменен этой поверхностью, если каждый ее элемент dS в свою очередь рассматривается как источник сферических волн. Поле в точке M определяется суперпозицией вторичных волн, идущих от всех элементарных источников.

Предполагается, что интенсивность источников, расположенных на поверхности S, пропорциональна величине площади dS. Амплитуда (f) и начальная фаза колебаний (α) зависят от расстояния между dS и источником света L (т. е. от R), а также от ориентации элемента $\vec{dS}$ в пространстве. Сферическая волна, исходящая от элемента площади поверхности $\vec{n}dS$, описывается выражением

$$\frac{f(\vec{n}, \vec{R})}{r} e^{i(kr - \omega t + \alpha(\vec{n}, \vec{R}))}, \tag{24.7}$$

где r – расстояние от dS до точки наблюдения. Поле в точке M определяется интегралом

$$E(M) = \int_S \frac{f(\vec{n}, \vec{R})}{r} e^{i(kr - \omega t + \alpha(\vec{n}, \vec{R}))} dS. \tag{24.8}$$

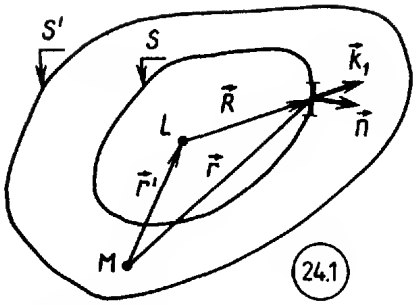
При практическом применении этого принципа поверхность S разбивается на зоны Френеля, причем вклад в колебания от каждой зоны удается учесть некоторыми феноменологическими коэффициентами.

Для обоснования принципа Гюйгенса – Френеля на основе исходных положений электродинамики используем решение волнового уравнения для точечного источника (24.6). Далее применим формулу Грина (см. П. II, 37):

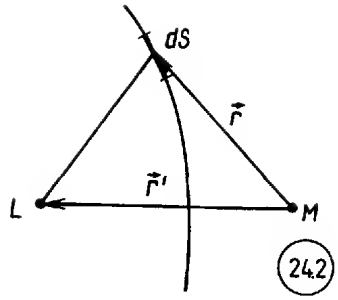
$$\int_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS. \tag{24.9}$$

В качестве области интегрирования выбираем объем V, заключенный между двумя замкнутыми поверхностями: уже рассмотренной (S) и другой, охватывающей ее, S'. Правая часть в формуле Грина распадается на два слагаемых:

$$\int_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS + \int_{S'} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS'.$$



24.1



24.2

Положим, что

$$\varphi = \frac{1}{r} e^{ikr}, \quad \psi = \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)},$$

и сдвинем поверхность S' в бесконечность. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю вследствие быстрого убывания подынтегральной функции. Получается равенство

$$\int_{\infty} \left[\frac{1}{r} e^{ikr} \Delta \left(\frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) - \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \Delta \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dV =$$

$$= \int_S \left[\frac{1}{r} e^{ikr} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) - \frac{a}{R} e^{i(kR - \omega t)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \qquad (24.10)$$

Используя тождество

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi \Delta\psi + \psi \Delta\varphi + 2(\nabla\varphi)(\nabla\psi)$$

и соотношение П. III, 9, находим

$$\Delta \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r}) e^{ikr} - k^2 \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$\Delta \left(\frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)} \right) = -4\pi\delta(\vec{R}) e^{i(kR - \omega t)} - k^2 \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R}.$$

Вычислим еще производные по нормали к поверхности S:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}) = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \right) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \cos(\widehat{\vec{n}\vec{R}}),$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Подстановка найденных величин в выражение (24.10) приводит к формуле

$$-4\pi a \int_{\infty} \left[\frac{1}{r} e^{ikr} \delta(\vec{R}) e^{i(kR - \omega t)} - \frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)} \delta(\vec{r}) e^{ikr} \right] dV =$$

$$= \int_S \frac{a e^{ikr} e^{i(kR - \omega t)}}{rR} \left[\left(ik - \frac{1}{R} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{R}}) - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}) \right] dS. \quad (24.11)$$

Формула (24.11) дает искомый результат, если учесть, что при $r = 0$, $R = r'$ и что в области интегрирования R нигде не равно нулю. Получаем

$$\frac{a}{r'} e^{\imath(kr' - \omega t)} = \int_S \frac{f}{r} e^{\imath(kr - \omega t)} dS, \tag{24.12}$$

где

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{a e^{\imath kR}}{R} \left[\left(\imath k - \frac{1}{R} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{R}}) - \left(\imath k - \frac{1}{r} \right) \cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}}) \right]. \tag{24.13}$$

В равенстве (24.12) слева — выражение для сферической волны, испускаемой точечным источником L, взятое в точке наблюдения M (см. (24.6)). Правую же часть можно истолковать как суперпозицию сферических волн, испускаемых элементами поверхности dS, для чего следует выражения (24.12) и (24.13) сравнить с выражениями (24.7) и (24.8). Амплитуда колебаний (и интенсивность) определяется величиной f. Она зависит от R и ориентации площадки. Если придать комплексному выражению в квадратных скобках (см. (24.13)) экспоненциальную форму и перемножить все получающиеся экспоненты в подынтегральной функции (24.12), то выявится и начальная фаза α, зависящая от R и ориентации площадки.

Заметим в заключение, что вместо замкнутой поверхности S может быть взята незамкнутая, уходящая краями в бесконечность (рис. 24.2),— принцип Гюйгенса — Френеля приложим и к ней.

24.4. Геометрическая оптика как предельный случай волновой. До сих пор рассматривались те вопросы оптики, которые связаны с волновой природой света. Однако известно, что часто волновой характер света можно игнорировать. Полагают, что энергия света распространяется вдоль определенных линий — световых лучей. Ее перемещение в пространстве можно уподобить даже движению некоторых частиц. В таком случае законы распространения света формулируются на языке геометрических соотношений. Поэтому соответствующий раздел физики световых явлений носит название геометрической оптики. Нам нужно выяснить границы применимости геометрических представлений о свете, для чего следует исходить из природы света, т. е. из волновых законов.

Прежде всего заметим, что понятие луча естественно появляется в теории плоских или сферических волн в однородной среде. Луч есть перпендикуляр к фронту волны. Его направление определяется волновым вектором $\vec{k}$, и оно совпадает с направлением распространения энергии электромагнитного поля плоской или сферической волны. Для плоской волны лучи — параллельные прямые, для сферической — радиальные линии, идущие от точечного источника.

Далее существенны характер пространственного распределения волнового поля, геометрическое изображение его с помощью лучей в более общем случае неоднородной среды. При анализе этих вопросов исходим из волнового уравнения, записанного в виде

$$\Delta A - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \tag{24.14}$$

где показатель преломления для неоднородной среды есть функция координат. Исключим временную зависимость полевой величины A, используя подстановку:

$$A(\vec{r},\ t) = A(\vec{r})\, e^{i\omega t}. \tag{24.15}$$

В результате приходим к уравнению, называемому уравнением Гельмгольца:

$$\Delta A + k^2 n^2 A = 0,\ \left(k = \frac{\omega}{c}\right). \tag{24.16}$$

В однородной среде уравнение (26.16) имеет решение в виде плоских волн:

$$A(\vec{r}) = ae^{ink\vec{r}}. \tag{24.17}$$

(В формуле (24.17) $nk = k' = \frac{\omega}{c'}$, где k' – волновое число в среде.)

Для неоднородной среды будем искать решение в той же форме, но учитывая зависимость показателя преломления среды от координат точки пространства $n\vec{k}\vec{r} = kL(\vec{r})$, где $L(\vec{r})$ – фаза волны, деленная на k.

Итак, предполагаемое решение имеет вид

$$A = ae^{ikL(\vec{r})}. \tag{24.18}$$

Подстановка выражения (24.18) в уравнение Гельмгольца (24.16) приводит к равенству

$$(\operatorname{grad} L)^2 = n^2 - \frac{1}{k}\Delta L. \tag{24.19}$$

Допустим, что во всех точках пространства

$$\left|\frac{\Delta L}{k}\right| \ll n^2, \tag{24.20}$$

тогда уравнение (24.19) переходит в равенство

$$(grad\ L)^2 = n^2, \tag{24.21}$$

т. е. $|\operatorname{grad} L| = n$, и решение (24.18) переходит в уравнение плоской волны.

Разложим функцию $L(\vec{r})$ в окрестностях произвольной точки $\vec{r}_0$ в ряд по степеням $(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Благодаря условию (24.20), можно ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$L(\vec{r}) = L(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0)(\operatorname{grad} L)_{r_0}. \tag{24.22}$$

Введем вектор $\vec{k}$, равный по модулю числу k в формуле (24.18) и совпадающий по направлению с $(\operatorname{grad} L)_{r_0}$. После подстановки формулы (24.22) и $\vec{k}$ в обсуждаемое решение (24.18) приходим к выражению

$$A = \text{const}\, e^{ik\vec{r}(\operatorname{grad} L)_{r_0}} = \text{const}\, e^{in(\vec{r}_0)\vec{k}\vec{r}} - \qquad (24.23)$$

уравнению плоской волны.

В рассматриваемом приближении (24.20) могут быть введены лучи как линии, всюду перпендикулярные поверхности равной фазы $L(\vec{r}) = \text{const}$ или фронту волны (рис. 24.3) Это значит, что применима геометрическая оптика. Осталось рассмотреть условие (24.20) с физической точки зрения. Так как по формуле (24.21) $|\operatorname{grad} L| = n$, то

$$|\Delta L| \sim \left|\frac{\Delta n}{\Delta x}\right|.$$

Поэтому выражение (24 20) дает

$$\frac{1}{k}\left|\frac{\Delta n}{\Delta x}\right| \ll n^2. \qquad (24.24)$$

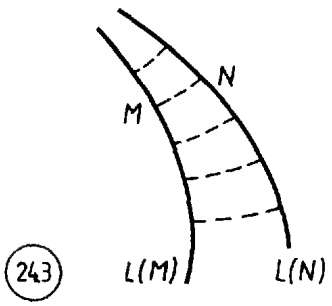
Следовательно, данное приближение, а с ним и геометрическая оптика применимы, если длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ много меньше расстояний, на которых заметно изменяется показатель преломления; в частности, в случае кусочно-однородной среды λ много меньше размеров однородных областей: отдельных тел, отверстий в телах и т. п.

24.5. Дисперсия диэлектрической проницаемости. Классическая электродинамика для поля в веществе использует простейшее материальное уравнение

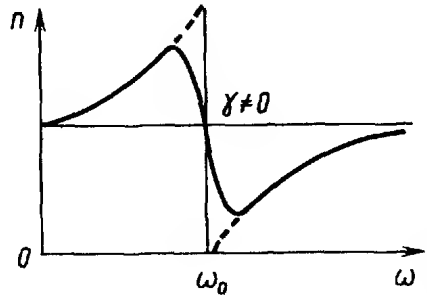
$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

в соответствии с которым ε является постоянной величиной, не зависящей ни от напряженности, ни от частоты электромагнитных волн в диэлектрике. Но опыт свидетельствует о зависимости скорости распространения или показателя преломления диэлектрика от частоты волн. В соответствии с формулами

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad n = \frac{c}{c'} = \sqrt{\varepsilon}$$



243



244

имеет место зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты ($\varepsilon = \varepsilon(\omega)$), или *дисперсия диэлектрической проницаемости среды.*

Это явление лежит за пределами феноменологической электродинамики Максвелла и полное объяснение получает в квантовой теории вещества. Однако качественная картина дисперсии понятна и из простых соображений классической электронной теории Ее можно раскрыть с помощью уравнений Максвелла – Лоренца.

Исходим из модели связанного и излучающего электрона Уравнение движения его в электрическом поле волны имеет вид

$$\vec{r} = -\frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \qquad (24\,25)$$

где γ – коэффициент сопротивления движению электрона вследствие радиационного трения, а $\delta = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – сдвиг фазы колебания электрона.

Предполагается, что длина волны много больше размеров области, где движется электрон. Переменный дипольный момент колеблющегося электрона выражается формулой

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \qquad (24.26)$$

Допустим, что в веществе содержится на единицу объема N независимых друг от друга электронов, вносящих вклад в поле в диэлектрике (такой модели вещества соответствует, например, разреженный газ). Тогда поляризация вещества описывается выражением

$$\vec{P} = \vec{p}N = \frac{Ne^2}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \qquad (24.27)$$

Далее используем формулу для вектора электрической индукции

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$

откуда

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0\left(1 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}\right)e^{i(\omega t - \delta)}.$$

Поскольку $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \qquad (24.28)$$

Мы видим, что диэлектрическая проницаемость зависит от частоты волнового поля. Для нее получено комплексное выражение Это в свою очередь ведет к комплексному волновому вектору, так как

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c}.$$

Физический смысл комплексного k раскрывается при выделении

действительной и мнимой частей. Электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\imath(kx - \omega t)}$$

при подстановке $k = a + ib$ приобретает вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm bx} e^{\imath(ax - \omega t)}.$$

Отсюда видно, что роль обычного волнового вектора играет действительная часть комплексного волнового числа k. Мнимая часть (величина b) определяет затухание волн при поглощении их средой либо усиление в так называемых активных средах.

Используя выражение (24.28), найдем показатель преломления с помощью формулы (23.32):

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

В разреженном газе и средах, где мало число взаимодействующих с волной электронов,

$$\left| \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath\gamma\omega} \right| \ll 1,$$

поэтому

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath\omega\gamma} = 1 + \frac{Ne^2}{2m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + \\ + i \frac{Ne^2}{2m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \qquad (24.29)$$

Действительная часть комплексного показателя преломления среды с дисперсией играет роль показателя преломления $\tilde{n}$, т. е.

$$c' = \frac{c}{\tilde{n}}.$$

На рисунке 24.4 показан ход кривой для зависимости $\tilde{n}(\omega)$ при малых коэффициентах γ. Характерная особенность дисперсии – резкое возрастание, а затем скачкообразный спад ее при частоте волны, близкой к собственной частоте связанного электрона, с последующим новым нарастанием.

Несмотря на простоту исходной модели, формула (24.29) достаточно полно описывает дисперсию разреженных газов и некоторых растворов.

В веществе обычно бывает несколько собственных частот ω_{0k} для колебаний электронов. Поэтому поляризация вещества вместо соотношения (24.27) выражается формулой

$$\vec{P} = \frac{e^2\vec{E}}{m} \sum_k \frac{N_k e^{-\imath\delta_k}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - \imath\gamma\omega}.$$

Соответственно видоизменяется формула (24.29) для показателя преломления:

$$\tilde{n} = 1 + \frac{e^2}{2m} \sum_k \frac{N_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

(Различием в разности фаз колебаний δ_k мы пренебрегаем.)

24.6. Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля. Понятие о нелинейной оптике. Вновь начнем с анализа материального уравнения классической электродинамики:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Пропорциональность $\vec{D}$ и $\vec{E}$ наблюдается только для сравнительно малых значений напряженности электрического поля. С созданием квантовых источников электромагнитных волн (в световом диапазоне они называются лазерами) в последние двадцать лет получены потоки энергии в волне порядка $10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, что соответствует напряженности поля $E \sim 10^8 \ldots 10^9 \frac{\text{В}}{\text{см}}$. Это огромные напряженности: они сравнимы и превышают напряженности внутриатомного поля. Понятно, что волны такой интенсивности в веществе не могут не изменять его свойства. И прежде всего становится зависящей от величины $\vec{E}$ диэлектрическая проницаемость вещества. Напомним, что

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + \chi,$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость вещества, считающаяся в максвелловской электродинамике постоянной. При высоких напряженностях поля следует написать разложение поляризации $\vec{P}$ по степеням напряженности поля $\vec{E}$, что для модулей величин дает

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E + \chi_2 \varepsilon_0 E^2 + \chi_3 \varepsilon_0 E^3 + \ldots \qquad (24.30)$$

Это основная формула нелинейной оптики. Коэффициенты χ_1, χ_2 и т. д. в общем случае зависят от частоты, но мы дисперсию среды сейчас учитывать не будем, т. е. считаем коэффициенты постоянными параметрами среды. Покажем на отдельных примерах, к чему приводит такое изменение модели поляризации вещества.

Пусть в диэлектрике распространяется гармоническая электромагнитная волна:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Поляризация среды, кроме линейного члена, содержит квадратичный, кубический и т. д. по степени напряженности члены:

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t) + \chi_2 \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \chi_3 \varepsilon_0 E_0^3 \cos^3(kx - \omega t) + \ldots.$$

Используя тригонометрические тождества, получим

$$P = \chi_1 \varepsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t) + \frac{\chi_2 \varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{\chi_3 \varepsilon_0}{3} E_0^3 \times$$
$$\times \cos 3(kx - \omega t) + \ldots \qquad (24.31)$$

(часть образующихся членов несущественна для дальнейшего и опущена).

В случае только линейной зависимости поляризации вещества от напряженности поля испускаемая веществом вторичная волна имеет ту же частоту, что и внешняя, первичная. При нелинейной зависимости «отклик» вещества на волну содержит и иные частоты. Так, второй член в формуле (24.31) дает удвоенную частоту, третий — утроенную. Впервые эффект удвоения частоты в кристаллах был открыт в 1961 г., в 1962 г. было открыто утроение частот. В эти же годы Р. В. Хохлов и С. А. Ахманов в СССР получили фундаментальные результаты в теории нелинейных оптических явлений. Среди нелинейных эффектов назовем также самофокусировку светового пучка и вынужденное комбинационное рассеяние. На основе нелинейных эффектов были созданы принципиально новые оптические устройства, например параметрические генераторы с плавной перестройкой частот.

Рассмотрим явление самофокусировки световых пучков. Самофокусировка появляется, если в разложении (24.30) существен квадратичный член. В таком случае зависимость показателя преломления от амплитуды электромагнитной волны (возникающая через зависимость от амплитуды вектора поляризации) может быть представлена в виде

$$n = n_0 + n_1 E^2.$$

В сильных полях наличие второго слагаемого приводит к самофокусировке. Допустим, что на тело из однородного диэлектрика падает пучок параллельных световых лучей, причем интенсивность пучка больше всего у его осевой линии. При прохождении света показатель преломления становится большим на оси, т. е. ранее оптически однородная среда становится неоднородной. Ее влияние на световой пучок эквивалентно действию собирающей линзы. Сказанное справедливо для $n_1 > 1$. При $n_1 < 1$ среда действует как рассеивающая линза.

24.7. Границы применимости классической электродинамики в оптике. Мы видели, что основные законы оптики находят теоретическое обоснование в классической электродинамике. Однако оптика — самостоятельная отрасль физического знания, охватывающая широчайший круг явлений, свойств, оптических устройств. Классическая электродинамика далеко не ко всем им применима. Причина заключается в ограниченности и приближенном характере электродинамики, что обусловлено в свою очередь грубостью применяемых в ней электромагнитных моделей вещества. Проистекающие отсюда ограничения усугубляются в области коротких световых

волн, для которых становится, как правило, существенной атомарная структура вещества.

Установленные еще Максвеллом соотношения для скорости волн в диэлектрике и для показателя преломления

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

сыграли важную историческую роль в развитии электромагнитной теории света. Они подвергались тщательной экспериментальной проверке. Формула для показателя преломления хорошо выполняется для одних веществ и вообще не выполняется для других либо выполняется только в определенных диапазонах частот.

Существенные ограничения применимости классической электродинамики в оптике связаны с поглощением и дисперсией света. Достаточно сказать, что в принципе все диэлектрики должны быть прозрачными для электромагнитных волн, однако в области светового диапазона частот этого отнюдь не наблюдается. Феноменологическая электродинамика не объясняет полностью дисперсию, в нее не укладываются эффекты нелинейной оптики.

Чтобы охватить весь круг явлений взаимодействия света с веществом, необходим учет атомно-молекулярного строения вещества, квантовой природы света, квантовых закономерностей взаимодействия света с веществом.

Но это не умаляет значения электродинамики как фундаментальной теории. Следует подчеркнуть основополагающее значение уравнений Максвелла в вакууме. В теории электромагнитного поля и в любой теории световых явлений они являются исходными соотношениями. Напомним также, что область применимости классической электродинамики как в вакууме, так и в веществе, несмотря на ограничения, все же очень обширна. И даже в тех случаях, когда ее законы оказываются не вполне точными, их использование позволяет нарисовать и осмыслить простую качественную картину физических явлений.

Методические указания и рекомендации

I. Выбранная в курсе последовательность изложения материала позволяет во многих случаях получать конкретные выводы переходом от общего к частному. Удается избежать выкладки и в ряде вопросов главы IX, переходя от формул для электромагнитных волн в вакууме к веществу формальными заменами некоторых параметров. Тем не менее все вопросы § 23 носят принципиальный характер и должны быть проработаны на лекциях.

Завершает курс параграф, посвященный электромагнитной природе света. Его при желании можно рассматривать как пример приложения теоретических положений электродинамики к широчайшему классу физических явлений, изучаемых в оптике. Но задача

такого приложения состоит отнюдь не в иллюстрациях законов электродинамики, а во вскрытии природы световых явлений. Поскольку световые волны заполняют важный диапазон в шкале электромагнитных волн, даже краткий курс электродинамики нельзя считать завершенным без вышеизложенного.

II. При чтении главы полезно руководствоваться некоторыми рекомендациями, обсуждать отдельные выводы и положения, отвечать на вопросы.

§ 23. Повторите материал о свободном поле в вакууме, о плоских волнах, монохроматических составляющих свободного поля. Обсудите вопрос о скорости света в среде. Относятся ли к ней постулаты Эйнштейна? Возможно ли движение (в среде) со скоростью, большей световой (в этой же среде)? Остановитесь на сходстве и различии волн в среде и вакууме. Что такое дисперсия волн? Опишите явления, происходящие при попадании света на поверхность, отделяющую проводник от диэлектрика. Почему невозможна радиосвязь с подводной лодкой при ее подводном плавании?

§ 24. Какова природа световых волн? Почему во многих оптических явлениях взаимодействия света с веществом рассматривают электрический, а не магнитный вектор волны, хотя энергии той и другой составляющей в ней одинаковы? Сопоставьте анализ вопроса о природе света в курсах общей физики, теоретической физики, в школьном курсе. Укажите границы применимости электродинамики вещества вообще и электродинамики в оптике в частности. Выполните упражнения.

Упражнения

1. Найти среднее значение вектора напряженности электрического поля для солнечных лучей, падающих на поверхность Земли, если $\sigma = 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2.

Ответ: $E \approx 750 \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

2. Найти коэффициенты отражения и прохождения электромагнитных волн через границу двух диэлектриков как отношения потоков энергии в волне.

3. Определить, что происходит с векторами поля и интенсивностями при сложении двух когерентных электромагнитных волн.

4. Вывести законы отражения и преломления света исходя из принципа Гюйгенса – Френеля.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Обозначения и единицы некоторых электрических и магнитных величин

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Электрический заряд	$Q = It$	кулон, Кл	с · А
Объемная плотность заряда	$\varrho = \frac{Q}{V}$	кулон на кубический метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Напряженность электрического поля	$E = \frac{F}{Q}$	вольт на метр, $\frac{\text{В}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Поток напряженности	$N(\Psi) = ES$	вольт-метр, В · м	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Потенциал электрического поля	$\varphi = \frac{A}{q}$	вольт, В	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Дипольный электрический момент	$p = ql$	кулон-метр, Кл · м	м · с А
Поляризованность	$P = \frac{p}{V}$	кулон на квадратный метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\text{м}^{-2} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = \frac{Q^2}{4\pi F r^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$	фарад на метр, $\frac{\Phi}{\text{м}}$	$\text{м}^{-3}\ \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{А}^2$
Кулоновская постоянная	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$	метр на фарад, $\frac{\text{м}}{\Phi}$	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-4} \cdot \text{А}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon = \frac{E_0}{E}$	–	–
Электрическая восприимчивость	$\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$	–	–

Продолжение

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Индукция электрического поля	$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$	кулон на квадратный метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\text{м}^{-2} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Поток электрической индукции	$\Psi = DS$	кулон, Кл	$\text{с} \cdot \text{А}$
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	фарад, Ф	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрический ток	I	ампер, А	А
Плотность тока	$j = \frac{I}{S}$	ампер на квадратный метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}^2}$	$\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$
Сопротивление (омическое)	$R = \frac{U}{I}$	ом, Ом	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3}$
Электрическая проводимость	$\frac{1}{R} = \frac{I}{U}$	сименс, См	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = \frac{j}{E}$	сименс на метр $\frac{\text{См}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{Il}$	гесла, Тл	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Поток магнитной индукции	$\Phi = BS$	вебер, Вб	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитный момент	$m = \frac{Fl}{B}$	ампер-квадратный метр, $\text{А} \cdot \text{м}^2$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	генри, Гн	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = \frac{2\pi r B}{I} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$	генри на метр, $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}\ \text{А}^{-2}$
Индукционная постоянная	$f = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	генри на метр, $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$	ампер на метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$
Магнитная проницаемость	$\mu = \frac{B}{B_0}$	–	–
Намагниченность	$J = \frac{m}{V}$	ампер на метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$

Продолжение

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Магнитная восприимчивость	$\varkappa = \frac{J}{H}$	–	–
Соотношение между константами k и f	$\frac{k}{f} = c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$	–	$м^2 \cdot с^{-2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Основные формулы векторного анализа

1. $\operatorname{grad} \varphi (x, y, z) = \nabla \varphi (x, y, z) = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ – формула градиента в декартовых координатах.
2. $\operatorname{grad} \varphi (\varrho, z, \alpha) = \vec{e}_\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ – формула градиента в цилиндрических координатах.
3. $\operatorname{grad} \varphi (r, \vartheta, \alpha) = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ – формула градиента в сферических координатах.
4. $\operatorname{grad} (\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi$ – градиент суммы.
5. $\operatorname{grad} (C\varphi) = C \operatorname{grad} \varphi$ – C – константа.
6. $\operatorname{grad} (\varphi \cdot \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$ – градиент произведения.
7. $\operatorname{grad} U (\varphi (x, y, z)) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \operatorname{grad} \varphi$ – градиент сложной функции.
8. $d\varphi (x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \operatorname{grad} \varphi d\vec{r}$ – полный дифференциал скалярного поля.
9. $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \operatorname{grad} \varphi \frac{\vec{l}}{l}$ – производная скалярного поля по направлению $\vec{l}$.
10. $\operatorname{div} \vec{a} (xyz) = \nabla \vec{a} (xyz) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ – формула дивергенции в декартовых координатах.

11. $\operatorname{div}\vec{a}(\varrho,\ z,\ \alpha)=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho a_\varrho)+\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}$ — формула дивергенции в цилиндрических координатах.

12. $\operatorname{div}\vec{a}(r,\ \vartheta,\ \alpha)=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)\right]+\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta a_\vartheta)\right]+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha}$ — формула дивергенции в сферических координатах.

13. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$.

14. $\operatorname{div}(C\vec{a})=C\operatorname{div}\vec{a}$.

15. $\operatorname{div}\varphi(xyz)\,\vec{a}(xyz)=\varphi\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}\varphi$.

16. $\operatorname{div}\vec{a}(\varphi(xyz))=\frac{\partial\vec{a}}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi$ — дивергенция сложной функции.

17. $\operatorname{rot}\vec{a}(xyz)=\vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$ — формула ротора в декартовых координатах.

18. $\operatorname{rot}\vec{a}(\varrho,\ z,\ \alpha)=\vec{e}_\varrho\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_z}{\partial\alpha}-\frac{\partial a_\alpha}{\partial z}\right)+\vec{e}_z\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho a_\alpha)}{\partial\varrho}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_\varrho}{\partial\alpha}\right]+$
$+\vec{e}_\alpha\left(\frac{\partial a_\varrho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\varrho}\right)$ — формула ротора в цилиндрических координатах.

19. $\operatorname{rot}\vec{a}(r,\ \vartheta,\ \alpha)=\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta a_\alpha)-\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\alpha}\right]+\vec{e}_\vartheta\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_r}{\partial\alpha}-\right.$
$\left.-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\alpha)\right)\right]+\vec{e}_\alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\vartheta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta}\right]$ — формула ротора в сферических координатах.

20. $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$.

21. $\operatorname{rot}(C\vec{a})=C\operatorname{rot}\vec{a}$.

22. $\operatorname{rot}\varphi(xyz)\,\vec{a}(xyz)=\varphi\operatorname{rot}\vec{a}+[(\operatorname{grad}\varphi)\,\vec{a}]$.

23. $\operatorname{rot}\vec{a}(\varphi(xyz))=-\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi\right]$ — ротор сложной функции.

24. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

25. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$.

26. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}=0$.

27. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\Delta\vec{a}$.

28. $(\vec{a}\nabla)\vec{b}=a_x\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\vec{b}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\vec{b}}{\partial z}$ — определение оператора $(\vec{a}\nabla)$ в декартовых координатах.

29. $\operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{b}\nabla)\,\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\,\vec{b} + [\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}] + [\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}]$.

30. $\operatorname{rot}[\vec{a}\,\vec{b}] = (\vec{b}\nabla)\,\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$.

31. $\operatorname{div}[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.

32. $\Delta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

33. $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$ — оператор Лапласа в сферических координатах.

34. $\int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \oint\limits_S \vec{a}\,\overrightarrow{dS}$ — теорема Остроградского — Гаусса.

35. $\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \oint\limits_L \vec{a}\,\overrightarrow{dl}$ — теорема Стокса.

36. $\int\limits_V \operatorname{rot}\vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \oint\limits_S [\overrightarrow{dS}\,\vec{a}]$ — аналог теоремы Гаусса для ротора.

37. $\int\limits_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\,dV = \oint\limits_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$ — формула Грина.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Сингулярная дельта-функция Дирака

1. $\delta(x) = \begin{cases}\infty, & x = 0,\\ 0, & x \neq 0;\end{cases}$

   $\int\limits_a^b \delta(x)\,dx = 1,\ a \leq 0 \leq b$ — определение δ-функции.

2. $\int\limits_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0),\ a \leq 0 \leq b$, или $\int\limits_c^d f(x)\,\delta(x-\alpha)\,dx = f(\alpha),\ c \leq \alpha \leq d$ — основное свойство δ-функции.

3. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha x}{\pi x} = \delta(x)$ — одно из аналитических выражений δ-функции.

4. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta(x)$.

5. $\delta(-x) = \delta(x),\ x\delta(x) = 0,\ \delta'(-x) = -\delta'(x),\ x\delta'(x) = -\delta(x),$
   $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ — важные свойства δ-функции.

6. $\delta(x,\ y,\ z) \equiv \delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ — трехмерное обобщение δ-функции.

7. $\int F(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,d\vec{r} = F(0)$, $\int F(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{a})\,d\vec{r} = F(\vec{a})$ — основное свойство трехмерной δ-функции.

8. $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k}$ — разложение δ-функции в интеграл Фурье.

9. $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$.

Равенство (9) показывает, что $\frac{1}{r}$ есть решение уравнения $\Delta U = 0$ везде, кроме точки $\vec{r} = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Доказательство равенства нулю интегралов, встречающихся при выводе формулы плотности импульса электромагнитного поля

Пусть
$$\vec{I} = \int_V \{\vec{E}\operatorname{div}\vec{E} - [\vec{E}\operatorname{rot}\vec{E}]\}\,dV. \tag{1}$$

Рассмотрим проекцию вектора $\vec{I}$ на ось Ox:

$$I_x = \int_V \left\{E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) - E_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + E_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right\} dV =$$

$$= \int_V \left\{\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) - \left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y\frac{\partial E_y}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right\} dV = \int_V \operatorname{div}\left(E_x\vec{E} - \vec{i}\frac{E^2}{2}\right)dV.$$

Применяя теорему Гаусса, получим $I_x = \oint_S \left(E_x\vec{E} - \vec{i}\frac{E^2}{2}\right)\overrightarrow{dS} = \oint_S E_x(\vec{E}\,\overrightarrow{dS}) - \frac{1}{2}\oint_S E^2(\overrightarrow{dS})_x$.

Аналогично записываются остальные проекции, а в векторной форме имеем

$$\vec{I} = \oint_S \vec{E}(\vec{E}\,\overrightarrow{dS}) - \frac{1}{2}\oint_S E^2\,\overrightarrow{dS}. \tag{2}$$

В интеграле (2) распространим интегрирование на все пространство. При этом поверхность S сдвигается в бесконечность. Если напряженность поля убывает быстрее чем $1/r$, то в пределе получим $\vec{I} = 0$. Действительно, площадь поверхности возрастает пропорционально r^2, а подынтегральная функция уменьшается как $1/r^{2\alpha}$, где $\alpha > 1$.

Аналогично доказывается равенство нулю интеграла

$$\int_\infty \{\vec{B}\operatorname{div}\vec{B} - [\vec{B}\operatorname{rot}\vec{B}]\}\,dV.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Особенности применения Международной системы единиц в электродинамике

Во всех разделах физики в настоящее время используется единая Международная система единиц (СИ). В различных областях науки и техники используются некоторые подсистемы, содержащиеся в СИ. В электродинамике используется подсистема метр — килограмм — секунда — ампер (МКСА). Система единиц МКСА представляет собой согласованную систему единиц для механики, электричества и магнетизма. Она основана на четырех основных единицах измерения — метр, килограмм, секунда, ампер — для четырех основных величин — длина, масса, время и электрический ток.

В уравнениях электродинамики использование единой системы МКСА приводит к появлению двух размерных коэффициентов — ε_0 и μ_0. Кроме того, возникает во многих

случаях множитель 4π. В ряде случаев формулы оказываются перегруженными громоздкими коэффициентами. (Это оправдывает применение в теории наряду с СИ согласованной абсолютной гауссовой системы, основные единицы которой сантиметр – грамм – секунда. В ряде существующих пособий применяется гауссова система.)

Объясним возникновение размерных коэффициентов в уравнениях электромагнетизма. В третьем и четвертом уравнениях Максвелла (2.1) в левые части входят напряженность и индукция поля, а в правые – плотности зарядов и токов. Но единицы измерения для зарядов и токов, с одной стороны, и векторов поля – с другой, выбраны независимо от связи, выраженной уравнениями. По этой причине в уравнениях появляются размерные коэффициенты. Коэффициентов всего два, т. е. их столько, сколько независимых уравнений системы. Нетрудно определить размерность коэффициентов. На основе (2.1) записываем для размерностей:

$$\frac{[B]}{L} = \frac{[E][\mu_0][\varepsilon_0]}{T} + [\mu_0]\frac{I}{L^2}; \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{[E]}{L} = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{IT}{L^3}. \qquad \text{(б)}$$

Из уравнения (б) $$[\varepsilon_0] = \frac{IT}{[E]L^2}.$$

Пользуясь размерностью $$[E] = \frac{ML}{T^2 IT},$$

окончательно получаем $$[\varepsilon_0] = \frac{I^2T^4}{ML^3},$$

что соответствует наименованию единицы $\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$.

Размерность μ_0 находится из уравнения (а) с учетом размерности B:

$$[\mu_0] = \frac{ML}{I^2T^2},$$

что соответствует наменованию единицы $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2}$.

Очевидно, что значения постоянных ε_0 и μ_0 можно определить в частных случаях связи полей и зарядов. Так, закон Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$.

открывает возможность (хотя бы в принципе) определения ε_0. Если располагать известными зарядами, например по 1 Кл, то, поместив их на определенном расстоянии друг от друга, например на 1 м, получим определенную силу взаимодействия $-9\cdot10^9$ Н. Отсюда и может быть определена электрическая постоянная:

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot10^{-12}\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}.$$

(Разумеется, описан мысленный эксперимент. Определение ε_0 может быть выполнено на основе любой другой формулы, куда ε_0 входит.)

Остановимся на выборе единицы силы тока в связи с обсуждаемым вопросом о размерных коэффициснтах. В § 1 упоминалось о том, что единица заряда определяется через единицу тока, а последняя – через взаимодействие токов: «ампер – единица тока равна неизменяющемуся току, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины».

Используя формулу для магнитной индукции прямого тока и формулу для силы Ампера, действующей на ток (обе формулы вытекают из уравнений Максвелла и формулы для магнитной составляющей силы Лоренца при определении $\vec{B}$), получаем в случае однородного поля $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l$

Если $l = 1$ м, $r = 1$ м, $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Н, то $I_1 = I_2 = 1$ А. Но тогда $\mu_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг м}}{\text{А}^2\ \text{с}^2} = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг м}}{\text{А}^2\ \text{с}^2}$.

Так как ампер – основная единица в СИ, то формула для силы F при указанном ее значении определяет величину и размерность коэффициента μ_0. (При этом считается $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ точно.)

Обратим также внимание на то, что при определении единиц заряда, напряженности и индукции поля никакие коэффициенты в соответствующие формулы не введены:

$$Q = It,\ E = \frac{F}{q},\ B = \frac{F}{qv}.$$

Это влияет на форму уравнений Максвелла. Так, магнитную индукцию можно определить формулой

$$F_{\text{маг}} = \frac{q}{c}[\vec{v}\vec{B}],$$

а определение электрической напряженности сохранить без изменения. В таком случае уравнения (1) и (2) системы Максвелла приобретают вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}.$$

В свою очередь можно выбрать единицы заряда согласованно с уравнениями Максвелла, устраняя в системе ε_0 и μ_0 (абсолютная гауссова система единиц)

Обсудим еще смысл так называемой рационализации уравнений электромагнетизма. При принятой нами записи четвертого уравнения Максвелла в законе Кулона возникает коэффициент $\frac{1}{4\pi}$. Если же записать уравнение в виде

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\varrho,$$

то коэффициента $\frac{1}{4\pi}$ в законе Кулона не будет Аналогично обстоит дело с третьим уравнением Максвелла· если оно пишется в принятой нами форме, то коэффициенты 4π и 2π возникают в формулах для индукции поля, сил, действующих на ток в поле, и т. д Широко применяется так называемая рационализированная системa записи уравнений Максвелла, которая используется и в нашем курсе В ней коэффициентов 4π в исходных уравнениях нет

Процесс становления системы МКСА и выбора ее в качестве основной для электромагнетизма в историческом плане был длительным и довольно сложным, а мы рассмотрели лишь суть вопроса, пользуясь готовыми результатами. Укажем также, что нами используются коэффициенты $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $f = \frac{\mu_0}{4\pi}$, что продиктовано исключительно потребностями упрощения записи громоздких формул Для возвращения в СИ в любой формуле следует заменить сокращенные обозначения (k, f) полными.

Литература для дополнительного чтения

1. Мултановский В. В. Курс теоретической физики.— М.: Просвещение, 1988.— Ч. I и II.

2. Левин В. И. Методы математической физики.— М.: Учпедгиз, 1960.

3. Несис Е. И. Методы математической физики.— М.: Просвещение, 1977.

4. Кудрявцев П. С. Курс истории физики.— М: Просвещение, 1982.

5. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике.— М: Наука, 1970.

6. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике.— М.: Наука, 1977.

7. Чертов А. Г. Международная система единиц измерений.— М.. Высшая школа, 1977.

8. Стоцкий Л. Р. Физические величины и их единицы.— М.: Просвещение, 1984.

9. Енохович А. С. Справочник по физике.— М.: Просвещение, 1978.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля: Курс теоретической физики.— М.: Наука, 1967.—Т. II; Электродинамика сплошных сред: Курс теоретической физики.— М.: Наука, 1982.— Т. VIII.

11. Левич В. Г. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1969.— Т. I.

12. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.

13. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Электричество.— М.: Наука, 1983.

14. Калашников С. Г. Электричество.— М.: Наука, 1985.

15. Матвеев А. Н. Электродинамика и теория относительности.— М.: Высшая школа, 1964.

16. Пеннер Д. И., Угаров В. А. Электродинамика и специальная теория относительности.— М.: Просвещение, 1980.

17. Физика микромира (Серия «Маленькая энциклопедия»).— М.: Советская энциклопедия, 1980.

18. Ландсберг Г. С. Оптика.— М.: Наука, 1976.

Учебное издание

МУЛТАНОВСКИЙ ВЯЧЕСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ
ВАСИЛЕВСКИЙ АНАТОЛИЙ СЕМЕНОВИЧ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Зав. редакцией *В. А. Обменина*
Редактор *О. В. Серышева*
Младшие редакторы *О. В. Агапова, Е. А. Буюклян*
Художники *В. С. Давыдов, Ю. В. Самсонов*
Художественный редактор *В. М. Прокофьев*
Технический редактор *Т. П. Локтионова*
Корректор *М. Ю. Сергеева*

ИБ № 11406

Сдано в набор 22.12.88. Подписано к печати 20.11.89. Формат $60\times90^1/16$. Бум. офсетная № 2. Гарнитура Конкорд. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 17,69. Уч.-изд. л. 16,18+0,42 форзац. Тираж 45 000 экз. Заказ № 223. Цена 75 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Набор и диапозитивы изготовлены на ордена Трудового Красного Знамени ПО «Детская книга» Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Отпечатано в областной типографии, 160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.